Równanie dyfuzji w opisie zjawisk zachodzących w heliosferze

Agnieszka Gil-Świderska

Instytut Matematyki i Fizyki, Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

gila@uph.edu.pl

30 V 2015 Będlewo

SIEDLCE UNIVERSITY
OF NATURAL SCIENCES AND HUMANITIES

Plan prezentacji

Kilka przykładów klas zmienności natężenia galaktycznego promieniowania kosmicznego

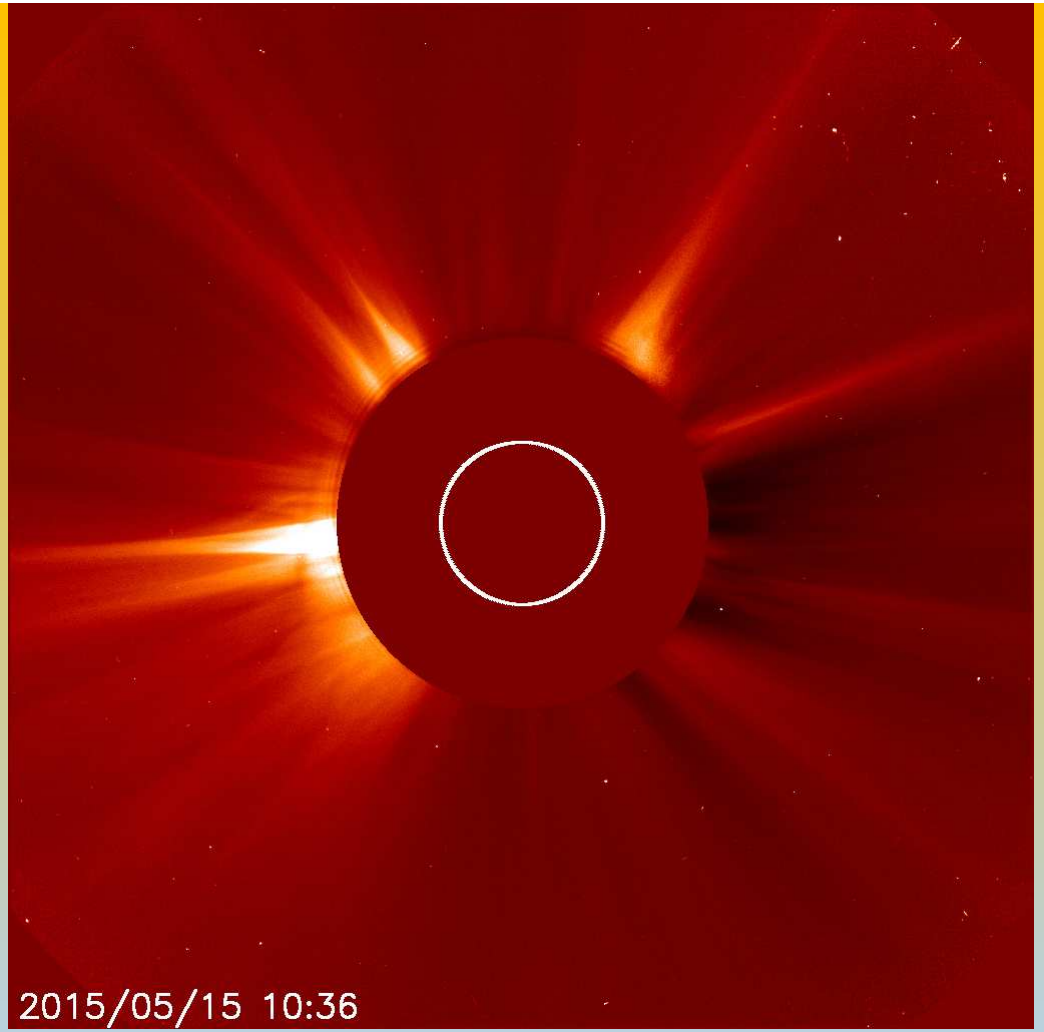
Równanie dyfuzji

Metoda różnic skończonych w rozwiązaniu równania Parkera

Stochastyczne równania różniczkowe w rozwiązaniu równania Parkera

Wyniki modelowania

Pewne zastosowania



sohowww.nascom.nasa.gov

SIEDLCE UNIVERSITY
OF NATURAL SCIENCES AND HUMANITIES

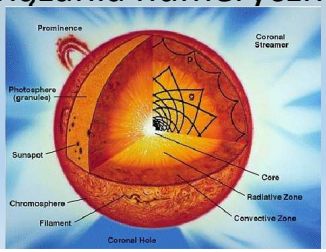
Streszczenie

Do Ziemi nieprzerwanie dociera strumień promieniowania kosmicznego, składający się w przeważającej większości z protonów. Poziom natężenia promieniowania kosmicznego jest ujemnie skorelowany z poziomem aktywności Słońca. Natężenie promieniowania kosmicznego od połowy lat 50 ubiegłego wieku jest rejestrowane na Ziemi dzięki globalnej sieci monitorów neutronowych i teleskopów mezonowych. Dane otrzymane z licznych sond kosmicznych pokazują jedynie lokalną sytuację w przestrzeni międzyplanetarnej w okolicach danego próbnika. Natomiast dane o natężeniu galaktycznego promieniowania kosmicznego pobrane z monitorów neutronowych i teleskopów mezonowych charakteryzują globalną sytuację w przestrzeni międzyplanetarnej, dzięki czemu mogą stanowić narzędzie służące badaniu ogólnych warunków panujących w pobliżu orbity Ziemi.

Transport cząstek promieniowania kosmicznego w heliosferze zachodzi pod wpływem nieustająco ekspandującego od Słońca wiatru słonecznego unoszącego wmrożone pole magnetyczne. Modulacja galaktycznego promieniowania kosmicznego w heliosferze zachodzi w następstwie fundamentalnych procesów: dyfuzji, konwekcji, dryfów oraz zmiany energii cząstek promieniowania kosmicznego w odpowiedzi na interakcje z wiatrem słonecznym. Do opisu zagadnień słonecznej modulacji promieniowania kosmicznego w różnych skalach czasowych służy równanie transportu Parkera (1965). Jest to niestacjonarne, czterowymiarowe (trzy zmienne przestrzenne oraz energia cząstek promieniowania kosmicznego) równanie różniczkowe cząstkowe II rzędu typu parabolicznego. Rozwiązanie tegoż równania w sposób analityczny jest niemożliwe, a jedynie w sposób numeryczny przy użyciu np. metody różnic skończonych, czy też stochastycznych równań różniczkowych.

Zaletą matematycznego modelowania transportu cząstek galaktycznego promieniowania kosmicznego w heliosferze jest możliwość dokonania porównania wyników rozwiązania numerycznego z rezultatami obserwacji.

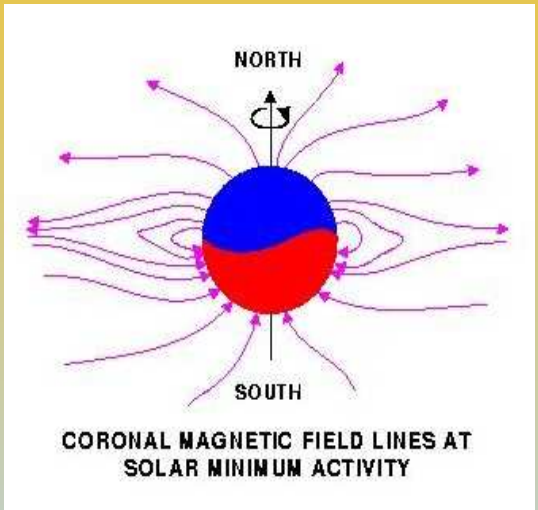
SIEDLCE UNIVERSITY
OF NATURAL SCIENCES AND HUMANITIES

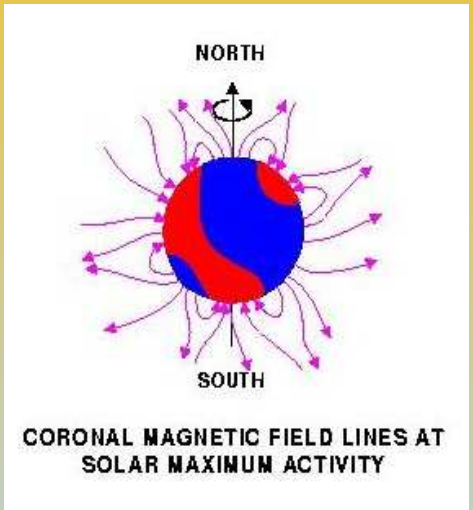


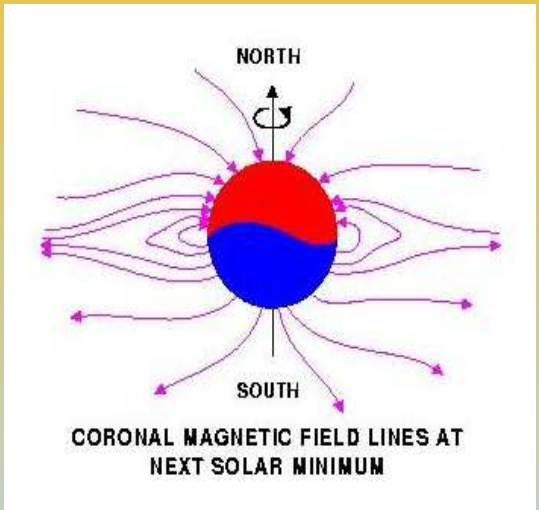
sohowww.nascom.nasa.gov

A>0

A<0

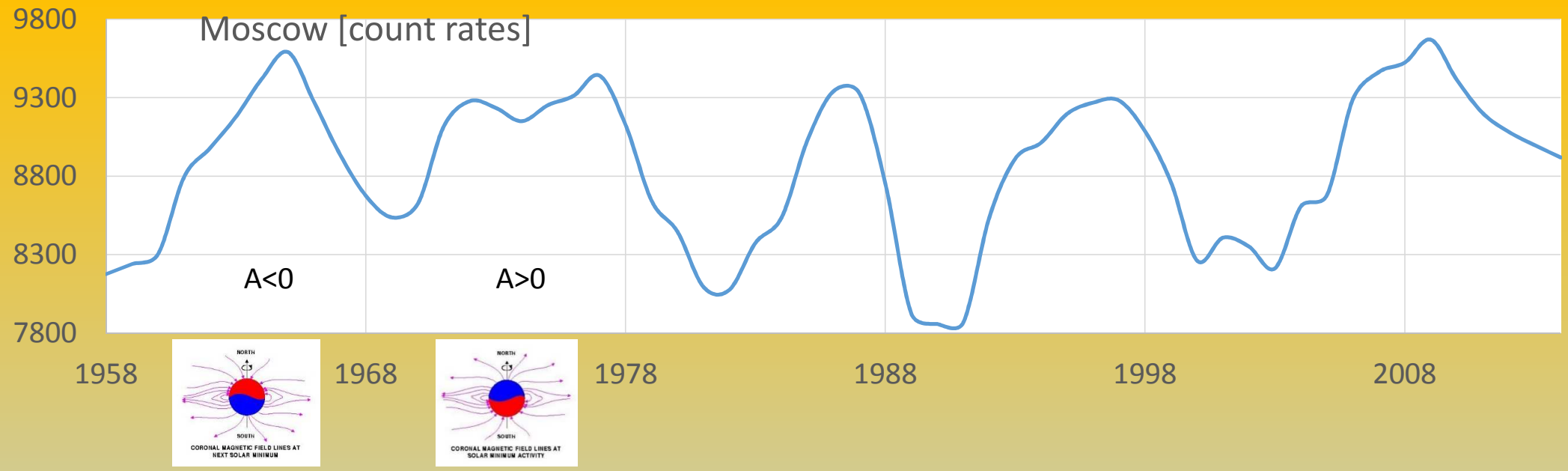


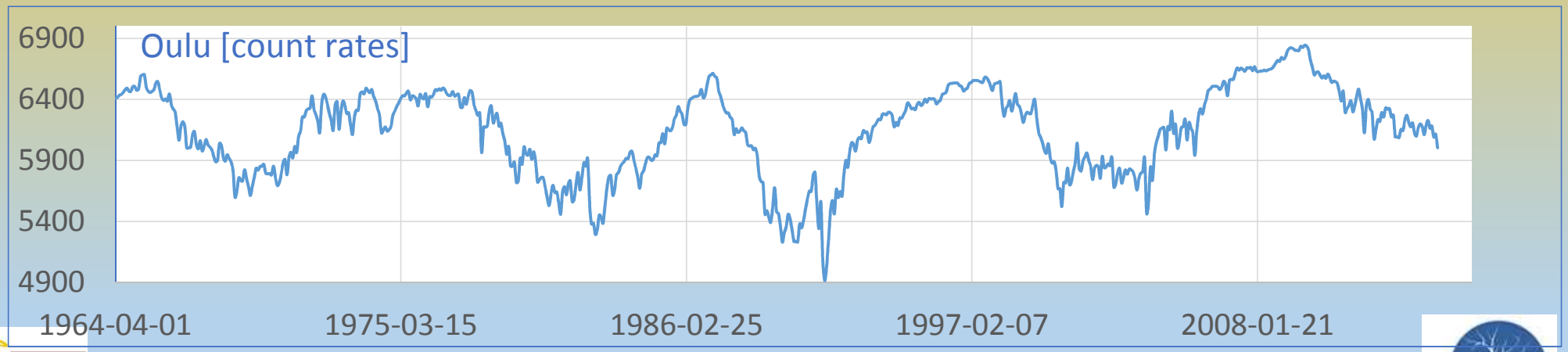




1908: Hale

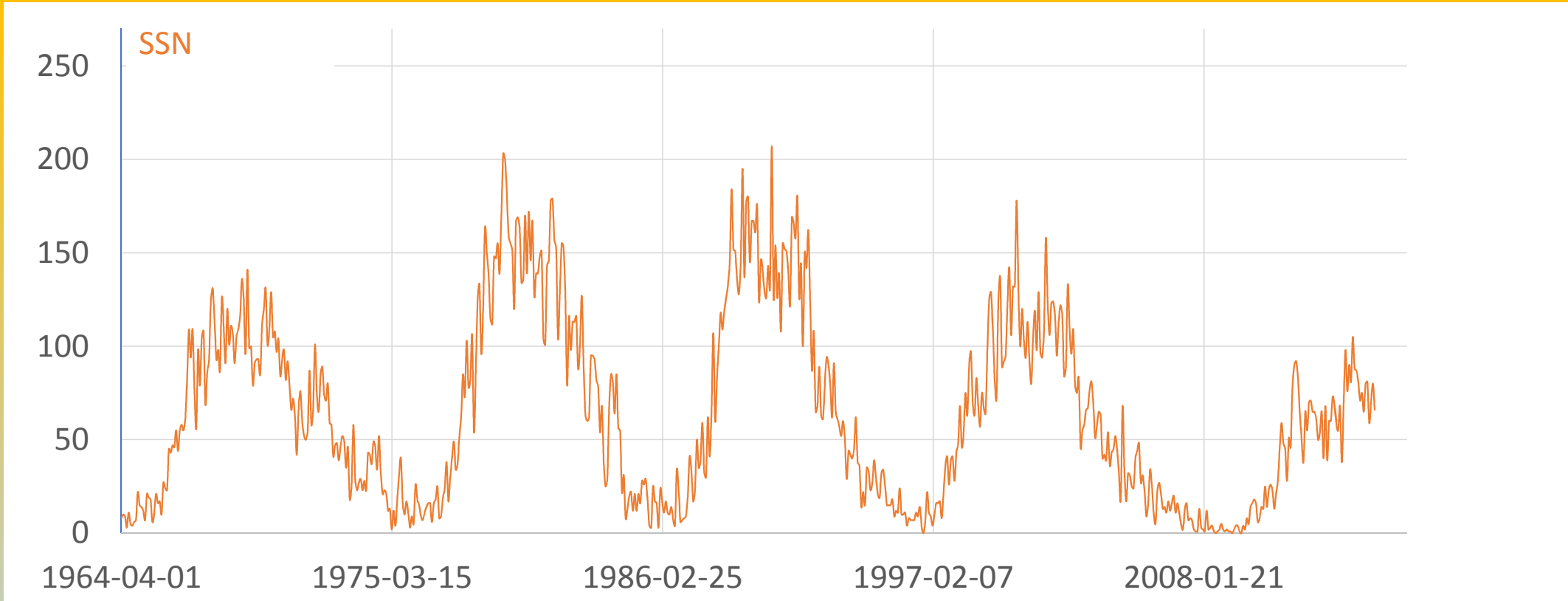
www.sp.ph.ic.ac.uk





SIEDLCE UNIVERSITY
OF NATURAL SCIENCES AND HUMANITIES

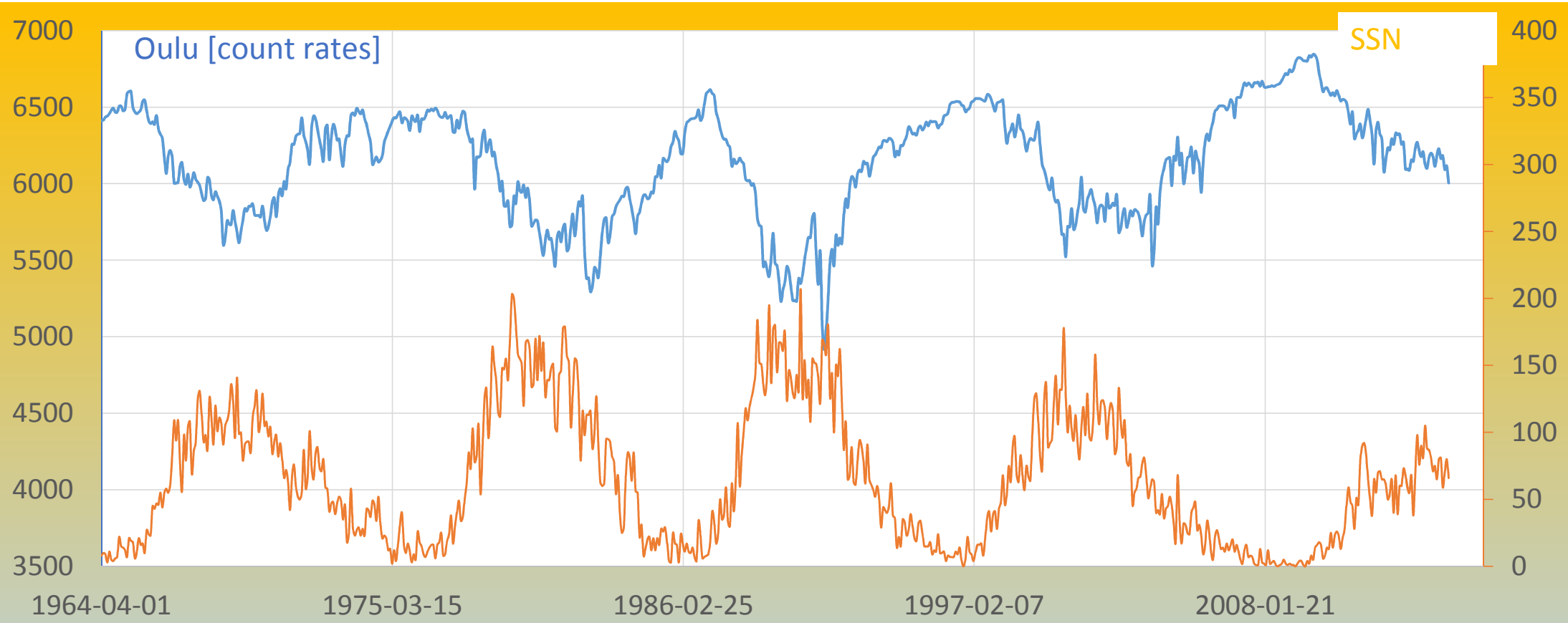
22-letnia zmienność



Średnie 27-dniowe w latach 1964 -2014 SSN (OMNIWeb)

SIEDLCE UNIVERSITY
OF NATURAL SCIENCES AND HUMANITIES

1843: Schwabe

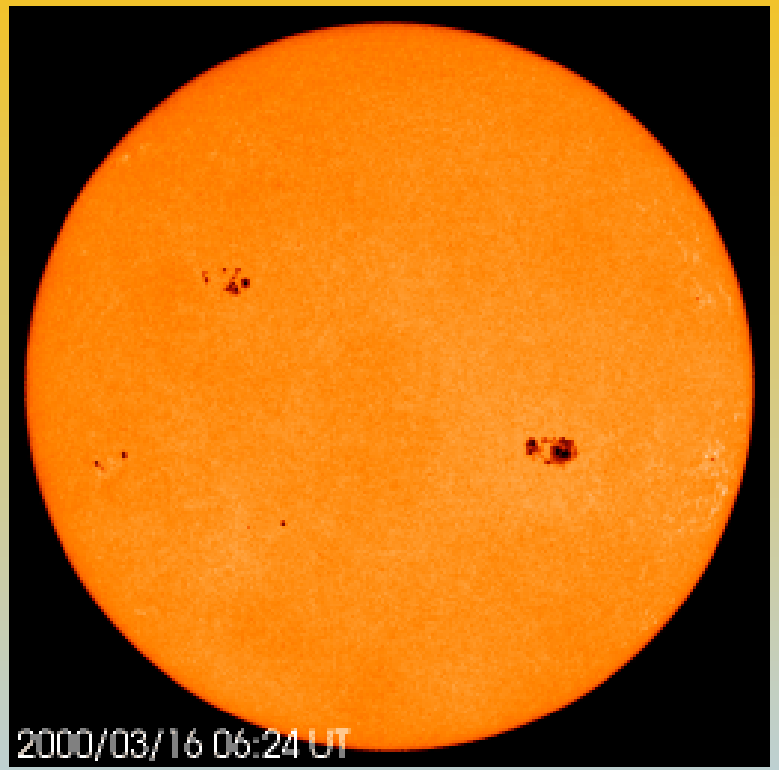


Średnie 27-dniowe w latach 1964 -2014, Oulu NM (cosmicrays.oulu.fi) and SSN (OMNIWeb)

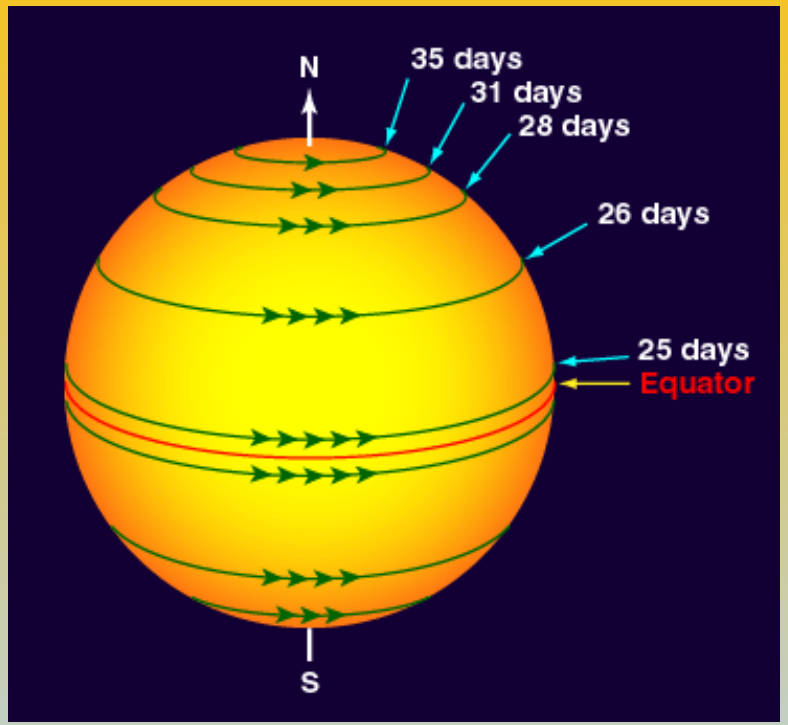
SIEDLCE UNIVERSITY
OF NATURAL SCIENCES AND HUMANITIES

11-letnia zmienność

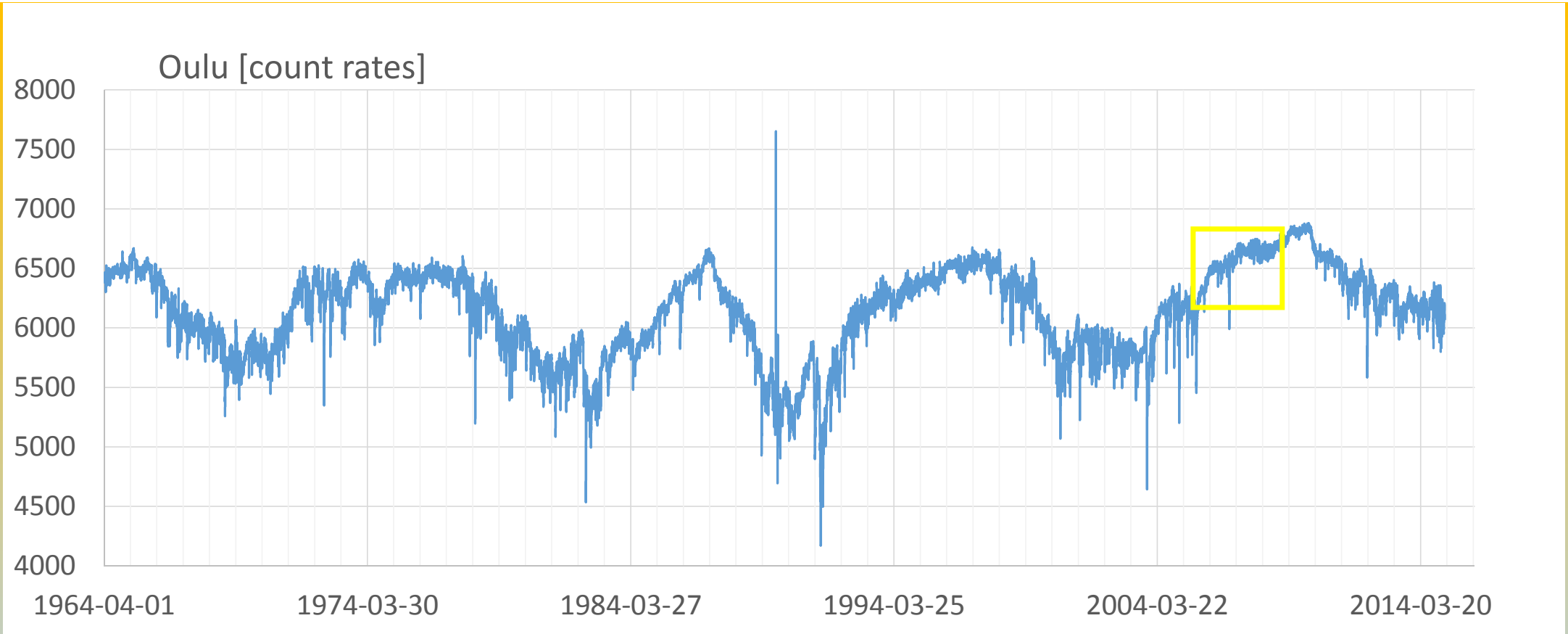
27-dniowa zmienność



http://www.astro.washington.edu



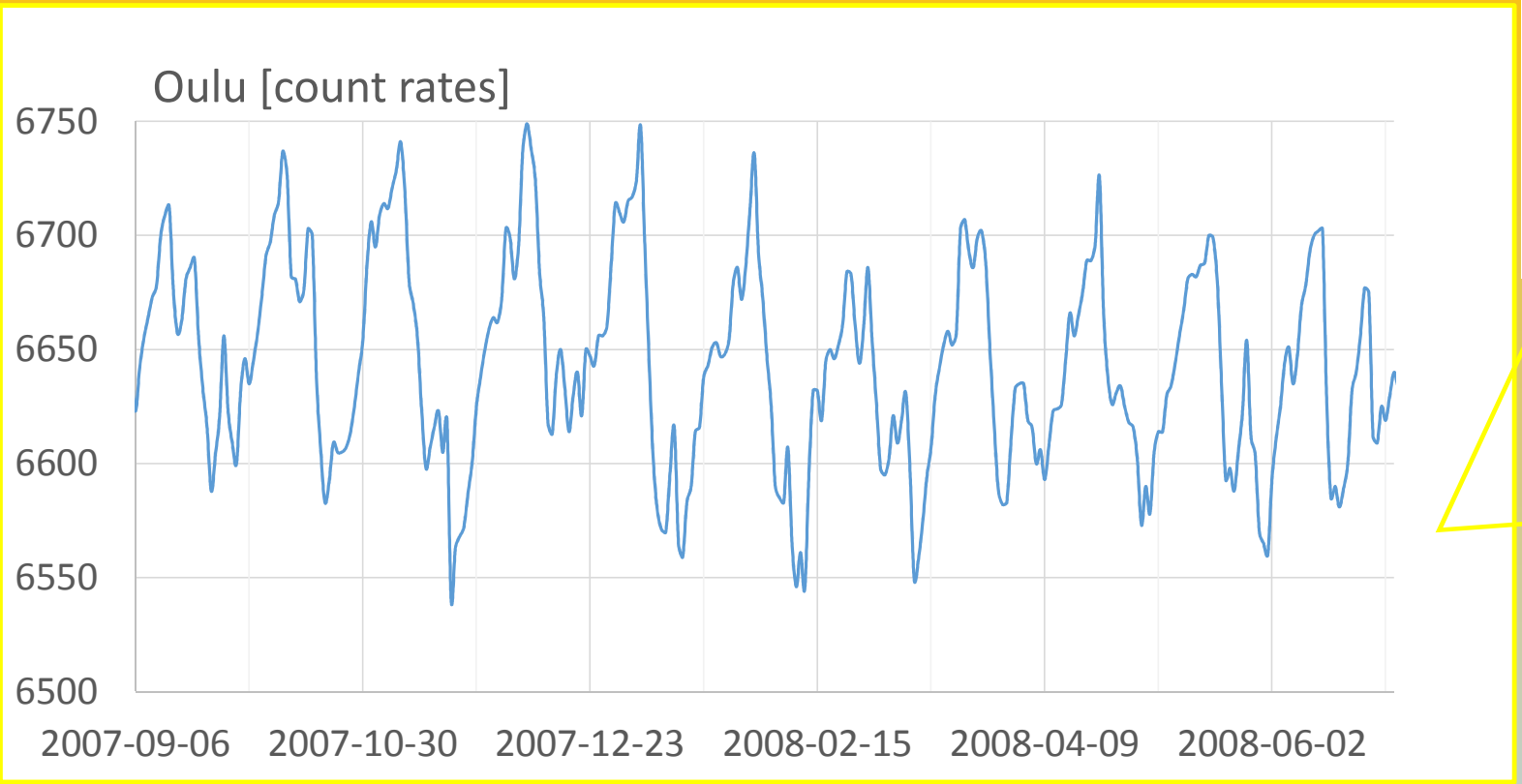
star.bris.ac.uk

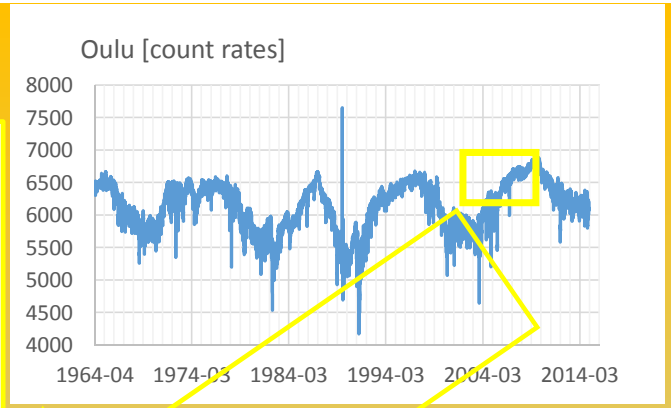


Dzienne dane, 1964 -2015, Oulu NM (cosmicrays.oulu.fi)

SIEDLCE UNIVERSITY
OF NATURAL SCIENCES AND HUMANITIES

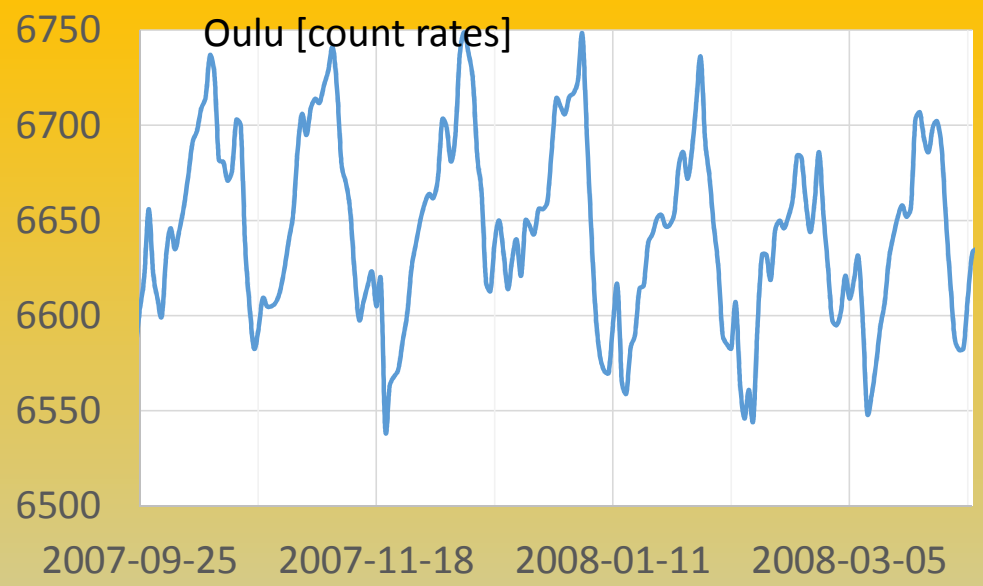
27-dniowa zmienność

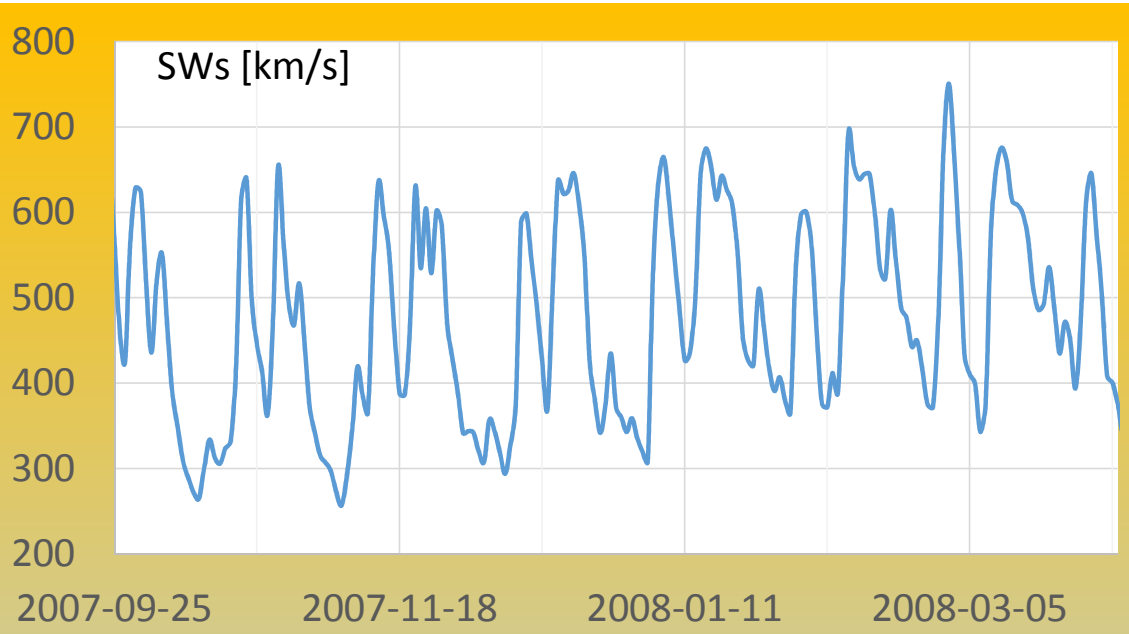


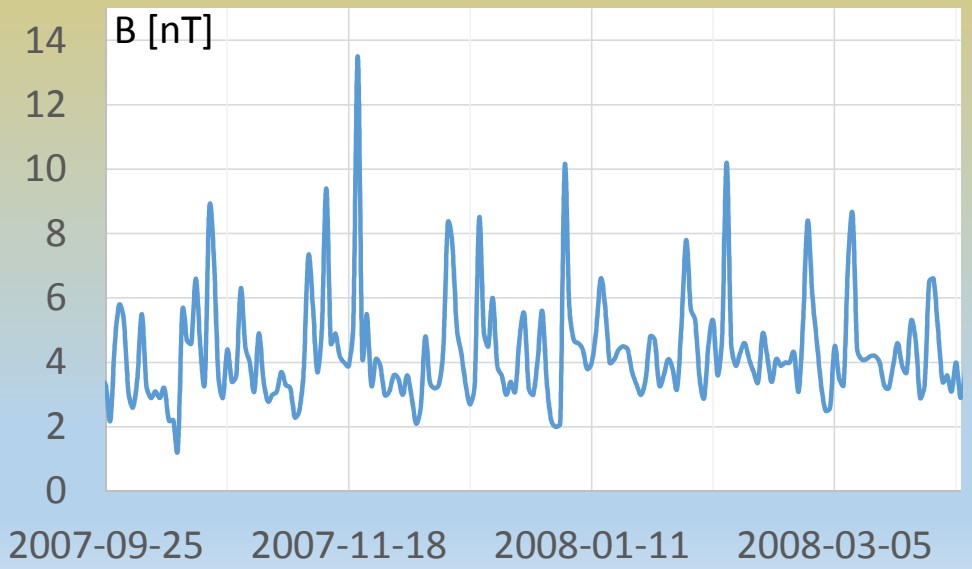


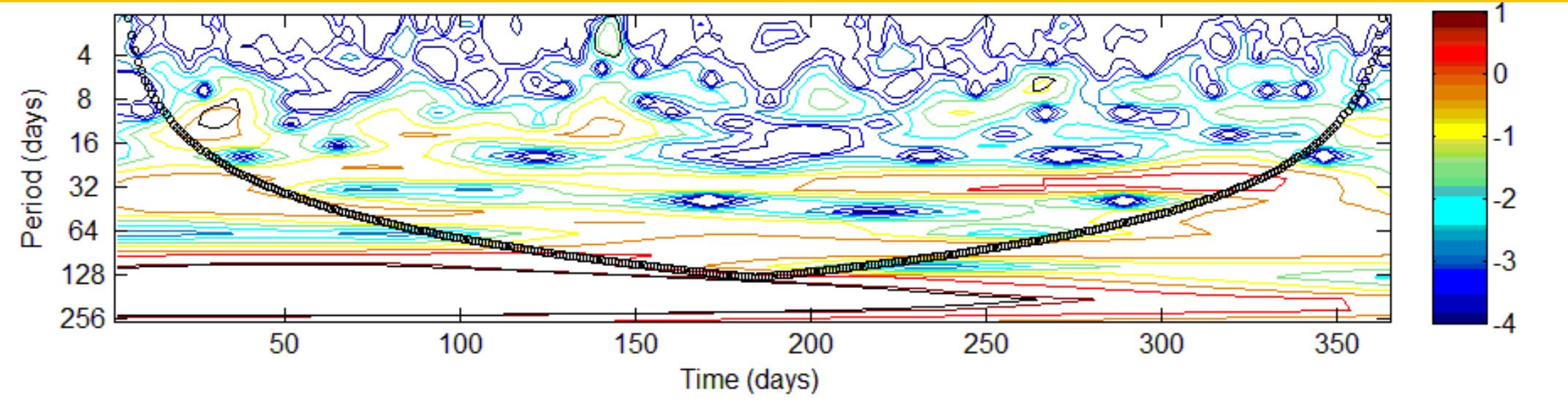
Dzienne dane, 2007 -2008, Oulu NM (cosmicrays.oulu.fi)

SIEDLCE UNIVERSITY
OF NATURAL SCIENCES AND HUMANITIES


Oulu [count rates]
6750
6700
6650
6600
6550
6500
2007-09-25
2007-11-18
2008-01-11
2008-03-05

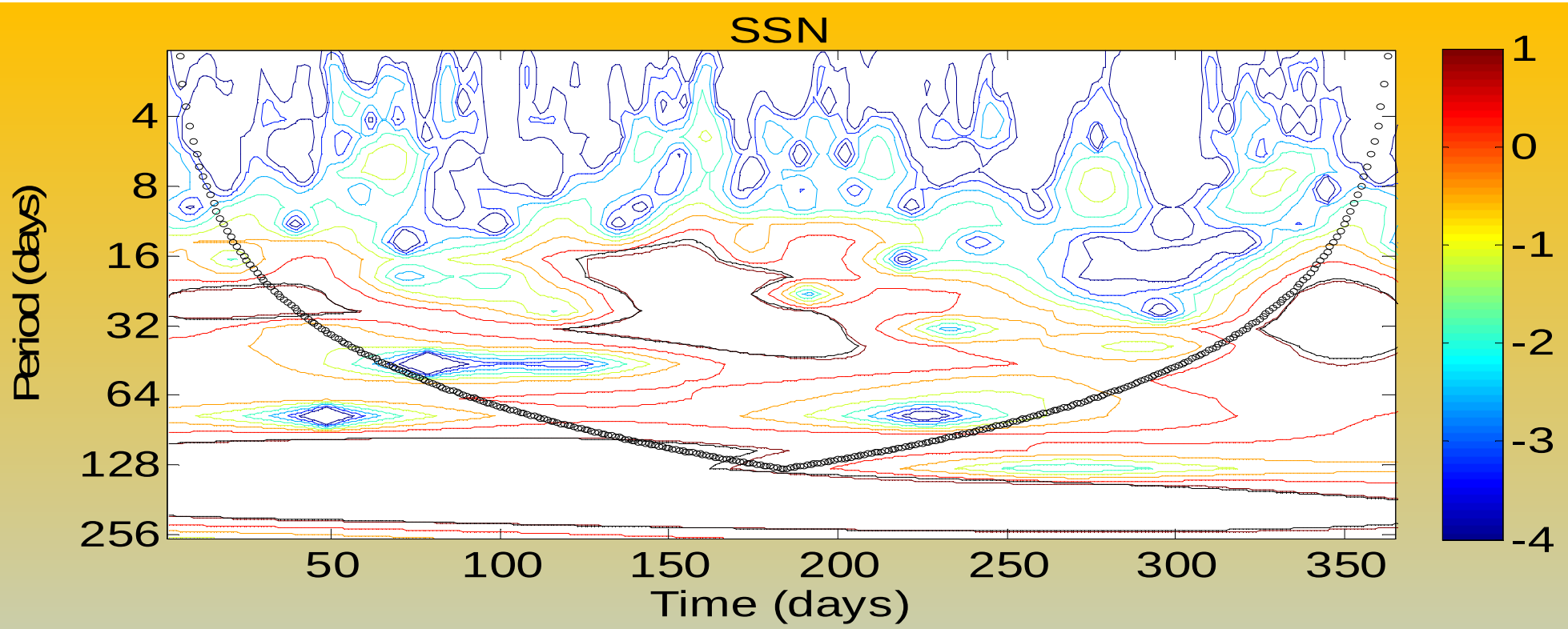

SWs [km/s]
800
700
600
500
400
300
200
2007-09-25
2007-11-18
2008-01-11
2008-03-05


B [nT]
14
12
10
8
6
4
2
0
2007-09-25
2007-11-18
2008-01-11
2008-03-05



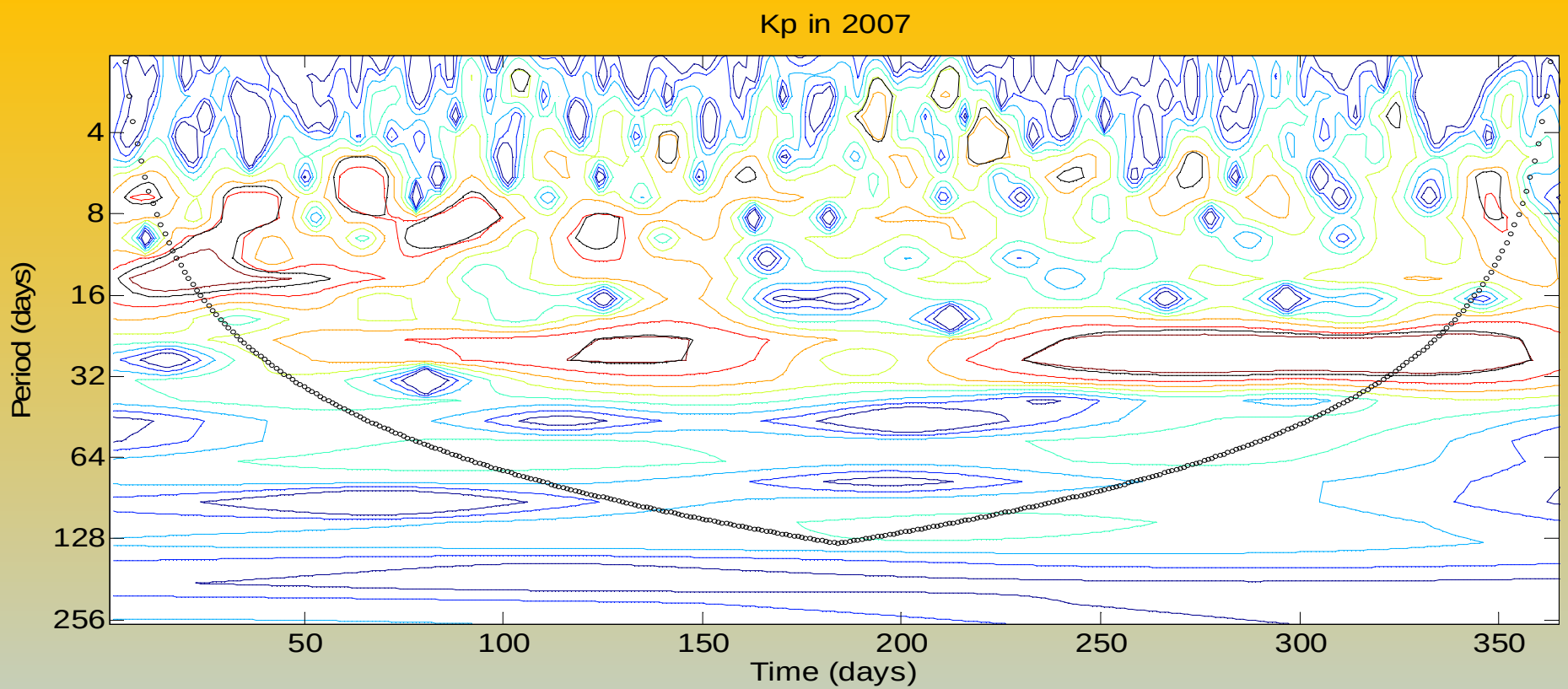
Analiza falkowa. Dzienne dane, Rzym NM, 2007

http://paos.colorado.edu/research/wavelets/



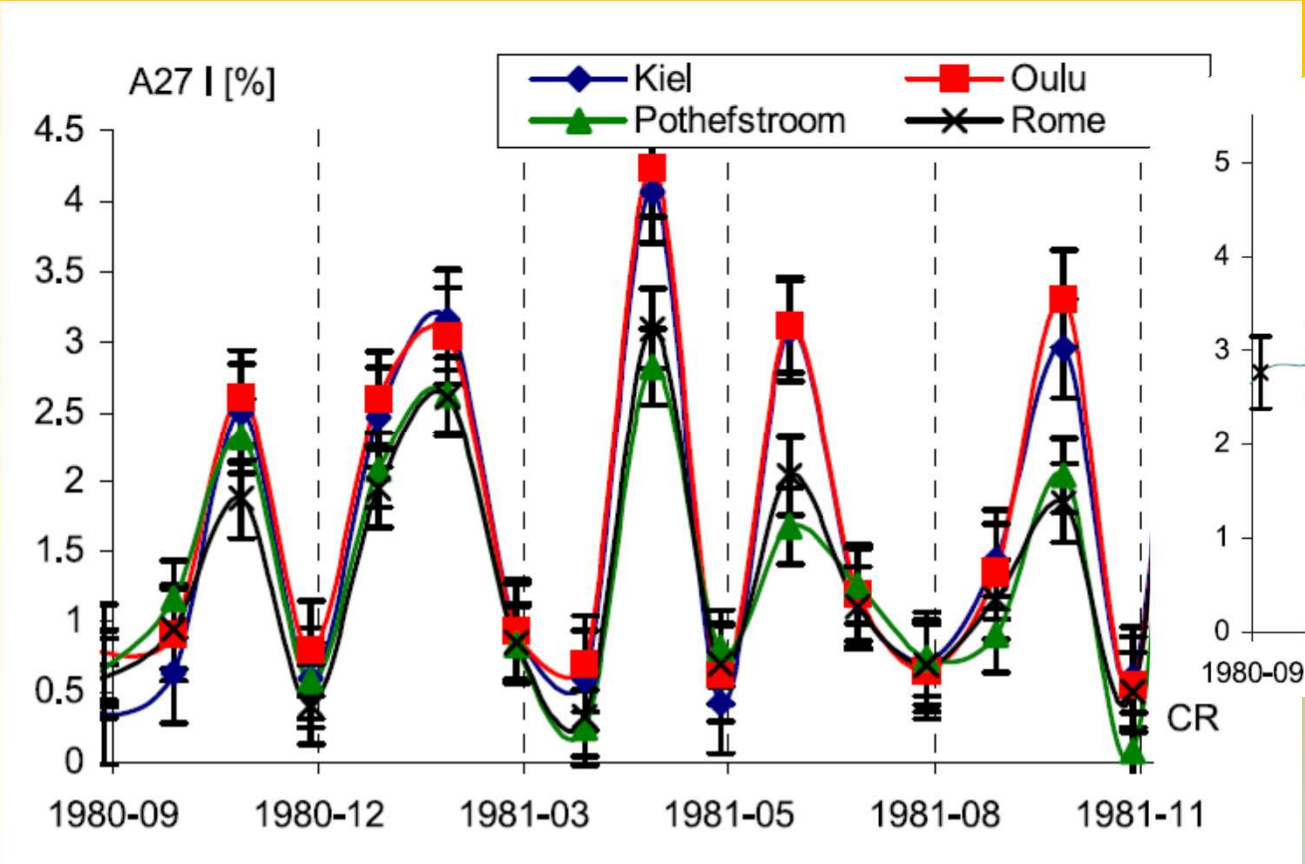
Dzienne dane, SSN, 2007 (OMNIWeb)

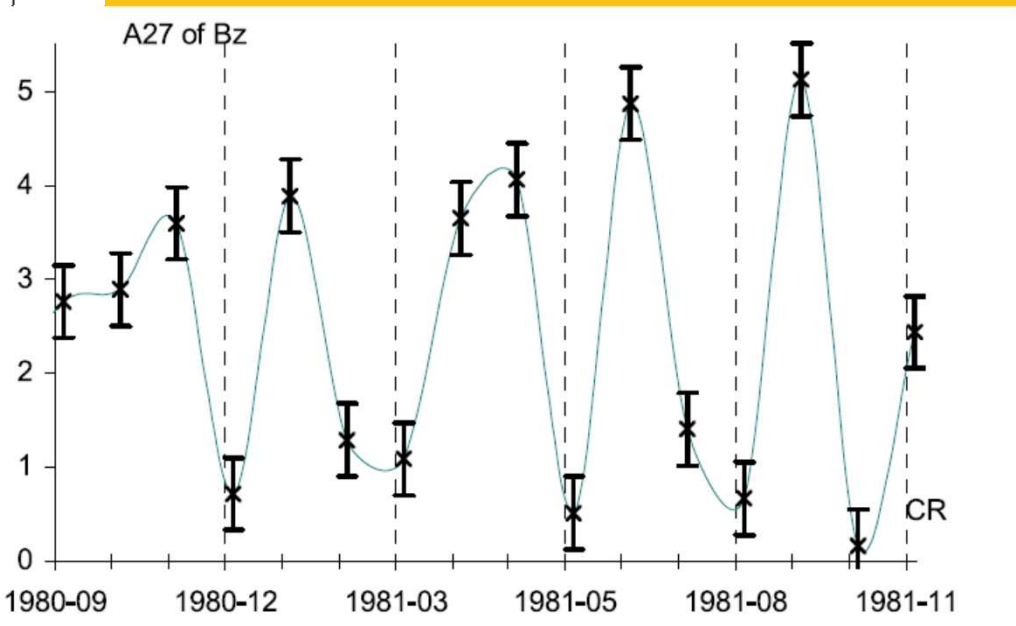
SIEDLCE UNIVERSITY
OF NATURAL SCIENCES AND HUMANITIES



Dzienne dane, Kp- index in2007 (OMNIWeb)

SIEDLCE UNIVERSITY
OF NATURAL SCIENCES AND HUMANITIES





3-4 CRP quasi-okresowość

Gil and Alania, 2012

Parker, 1965

$$\nabla\left(\kappa^{s}\nabla f\right)-\left(U+v_{dr}\right)\nabla f+\frac{1}{3}\nabla U p\frac{\partial f}{\partial p}=\frac{\partial f}{\partial t}$$

SIEDLCE UNIVERSITY
OF NATURAL SCIENCES AND HUMANITIES

Tensor

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{pmatrix}$$

$$\psi = arctg\frac{-B_\varphi}{B_r} = arctg\frac{\Omega r \sin\theta}{U}$$

$$\delta = arctg\frac{B_\theta}{B_r}$$

$$\beta = \frac{\kappa_\perp}{\kappa_\parallel}, \ \beta_1 = \frac{\kappa_d}{\kappa_\parallel}$$

$$K_{ij} = K_{ij}^{(S)} + K_{ij}^{(A)}$$

$$v_{d,i} = \frac{\partial K_{ij}^{(A)}}{\partial x_j}$$

Jokipii, Levy and Hubbard, 1977

Tensor

$$\kappa_{11} = \kappa_{\parallel}\left[\cos^2\delta\cos^2\psi + \beta\left(\cos^2\delta\sin^2\psi + \sin^2\delta\right)\right]$$

$$\kappa_{12} = \kappa_{\parallel}\left[\sin\delta\cos\delta\cos^2\psi(1-\beta) - \beta_1\sin\psi\right]$$

$$\kappa_{13} = \kappa_{\parallel}\left[\sin\psi\cos\delta\cos\psi(\beta-1) - \beta_1\sin\delta\cos\psi\right]$$

$$\kappa_{21} = \kappa_{\parallel}\left[\sin\delta\cos\delta\cos^2\psi(1-\beta) + \beta_1\sin\psi\right]$$

$$\kappa_{22} = \kappa_{\parallel}\left[\sin^2\delta\cos^2\psi + \beta\left(\sin^2\delta\sin^2\psi + \cos^2\delta\right)\right]$$

$$\kappa_{23} = \kappa_{\parallel}\left[\sin\delta\sin\psi\cos\psi(\beta-1) + \beta_1\cos\delta\cos\psi\right]$$

$$\kappa_{31} = \kappa_{\parallel}\left[\cos\delta\sin\psi\cos\psi(\beta-1) + \beta_1\sin\delta\cos\psi\right]$$

$$\kappa_{32} = \kappa_{\parallel}\left[\sin\delta\sin\psi\cos\psi(\beta-1) - \beta_1\cos\delta\cos\psi\right]$$

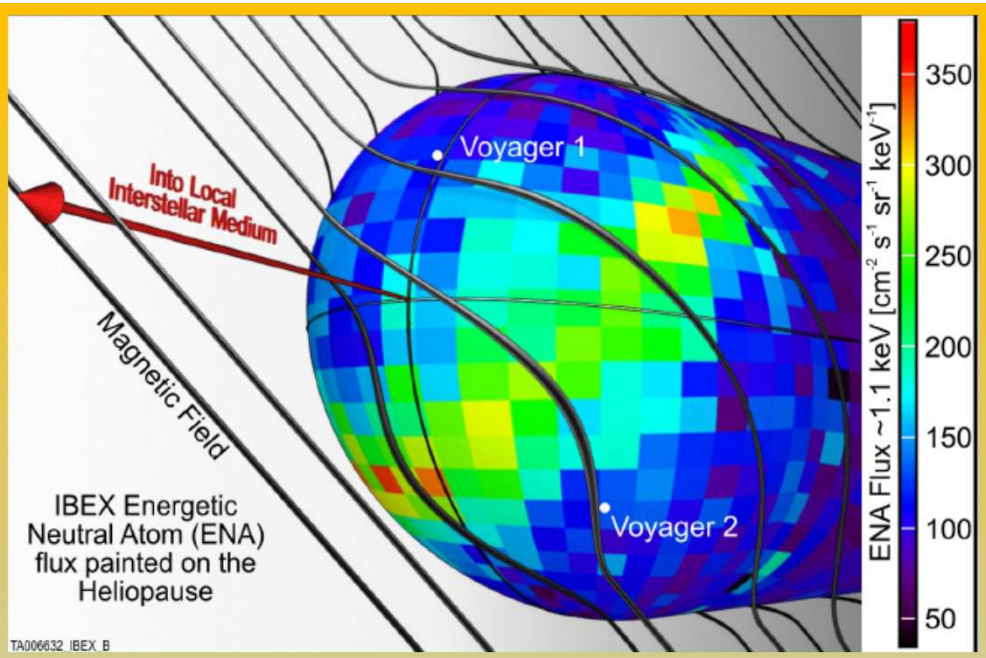
$$\kappa_{33} = \kappa_{\parallel}\left[\sin^2\psi + \beta\cos^2\psi\right]$$

$$\kappa_{\parallel} = \kappa_0\kappa(\rho,\theta,\varphi)\kappa(R)$$

$$\kappa_{\parallel} \approx 10^{23}\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$$

[Alania 1978; 2002]

$$I_0 = \frac{21.1\, T^{-2.8}}{(1 + 5.85T^{-1.22} + 1.18T^{-2.54})}$$

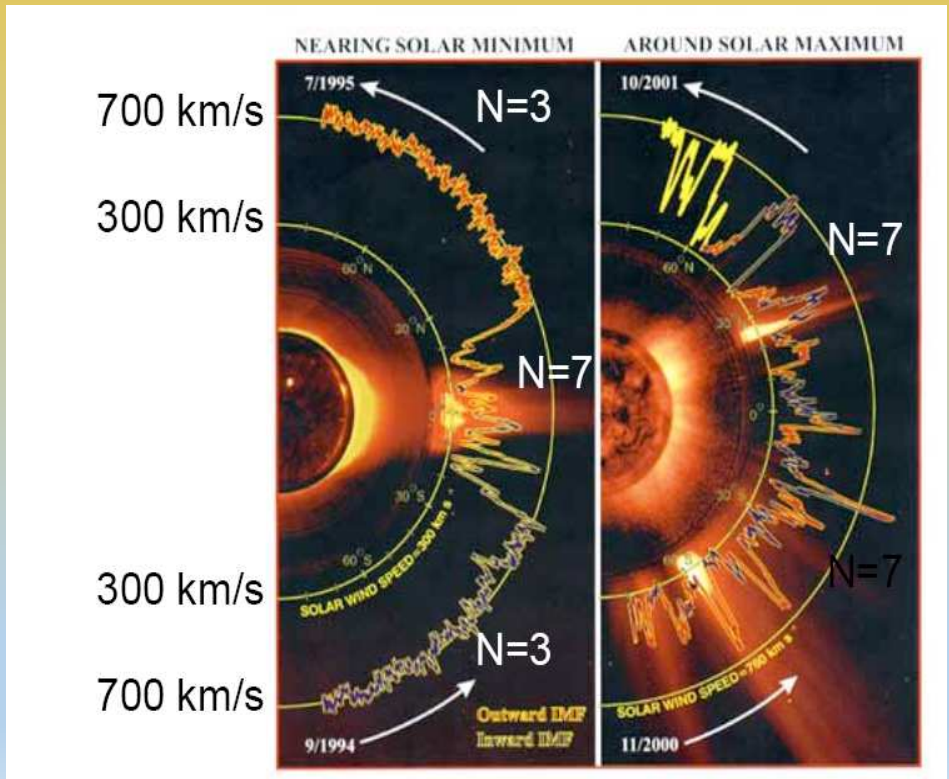


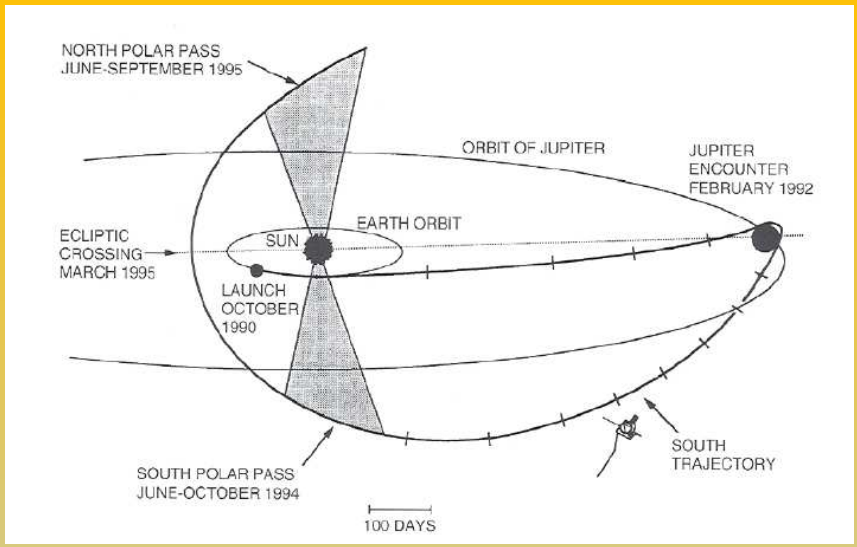
http://ibex.swri.edu/

LIS:
Webber & Lockwood (2001), Caballero-Lopez & Moraal (2004)

Rozmiar heliosfery 100 AU

Ulysses





$$U_0(\theta) = \begin{cases} 800 & \theta \in (0,50) \cup (130^0, 180^0) \\ -20 \cdot \theta / 1^0 + 1800 & \theta \in (50^0, 70^0) \\ 400 & \theta \in (70^0, 110^0) \\ 20 \cdot \theta / 1^0 - 1800 & \theta \in (110^0, 130^0) \end{cases}$$

$$A_1\frac{\partial^2 n}{\partial\rho^2}+A_2\frac{\partial^2 n}{\partial\theta^2}+A_3\frac{\partial^2 n}{\partial\varphi^2}+A_4\frac{\partial^2 n}{\partial\rho\partial\theta}+A_5\frac{\partial^2 n}{\partial\varphi\partial\theta}+A_6\frac{\partial^2 n}{\partial\rho\partial\varphi}+$$

Do metody różnic skończonych

$$A_7\frac{\partial n}{\partial\rho}+A_8\frac{\partial n}{\partial\theta}+A_9\frac{\partial n}{\partial\varphi}+A_{10}\,n+A_{11}\frac{\partial\ n}{\partial\ R}=0$$

$$A_1=\kappa(\rho,\theta,\varphi)\rho^2\kappa_{11},\ \ A_2=\kappa(\rho,\theta,\varphi)\kappa_{22},\ \ A_3=\kappa(\rho,\theta,\varphi)\frac{\kappa_{33}}{\sin^2\theta},\ \ A_4=\kappa(\rho,\theta,\varphi)\rho(\kappa_{12}+\kappa_{21}),$$

$$A_5=\kappa(\rho,\theta,\varphi)\frac{(\kappa_{23}+\kappa_{32})}{\sin\theta},\ \ A_6=\kappa(\rho,\theta,\varphi)\frac{\rho}{\sin\theta}(\kappa_{31}+\kappa_{13}),$$

$$A_7=\frac{-U\,\rho^2}{\kappa_0\kappa(R)}+\kappa(\rho,\theta,\varphi)\left(2\rho\kappa_{11}+\rho^2\frac{\partial\kappa_{11}}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial\kappa_{21}}{\partial\theta}+\frac{\rho}{\sin\theta}\frac{\partial\kappa_{31}}{\partial\varphi}+\rho ctg\,\theta\kappa_{21}\right)+$$

$$+\rho\kappa_{21}\frac{\partial\kappa(\rho,\theta,\varphi)}{\partial\theta}+\rho^2\kappa_{11}\frac{\partial\kappa(\rho,\theta,\varphi)}{\partial\rho}+\frac{\rho}{\sin\theta}\kappa_{31}\frac{\partial\kappa(\rho,\theta,\varphi)}{\partial\varphi},$$

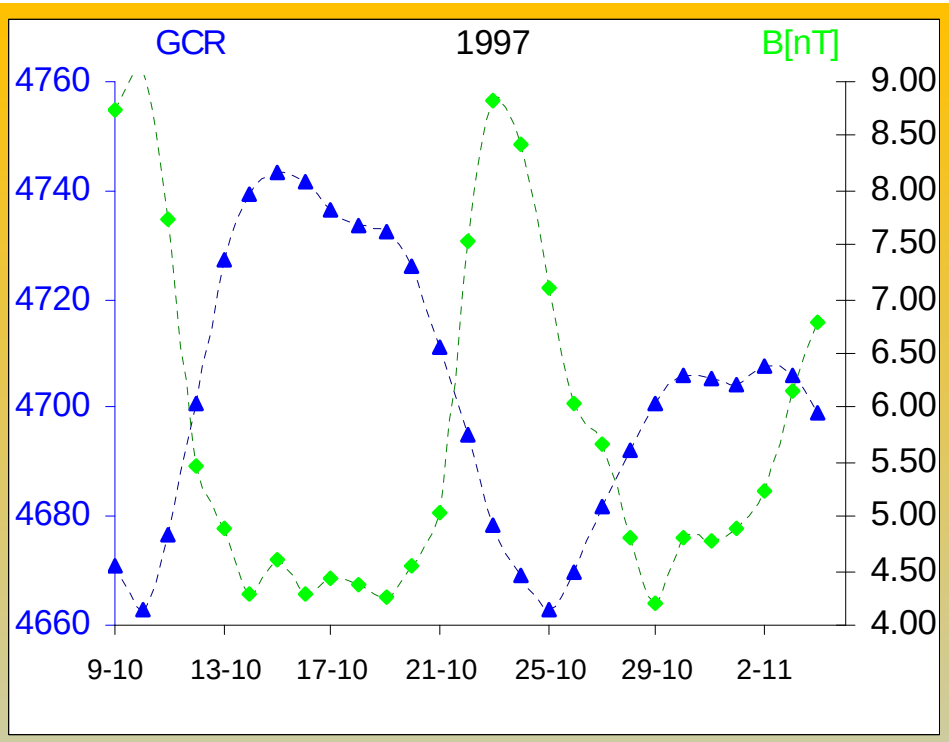
$$A_8 = \kappa(\rho,\theta,\varphi)\left(\rho\frac{\partial\kappa_{12}}{\partial\rho} + K_{12} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\kappa_{32}}{\partial\varphi} + ctg\,\theta K_{22} + \frac{\partial\kappa_{22}}{\partial\theta}\right) +$$

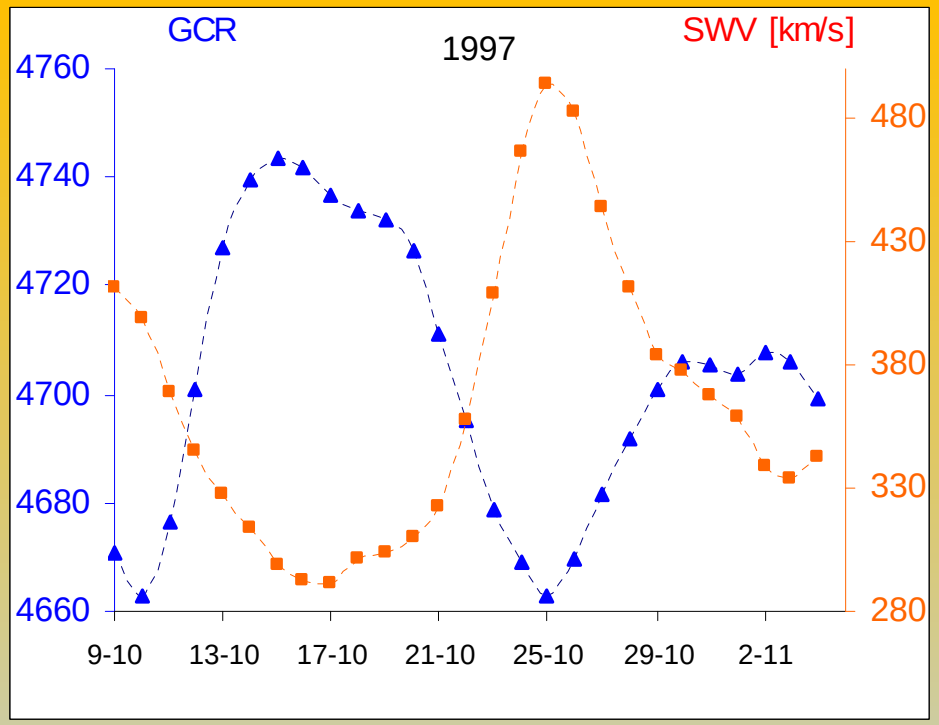
$$+\rho\kappa_{12}\frac{\partial\kappa(\rho,\theta,\varphi)}{\partial\rho} + \frac{1}{\sin\theta}\kappa_{32}\frac{\partial\kappa(\rho,\theta,\varphi)}{\partial\varphi} + \kappa_{22}\frac{\partial\kappa(\rho,\theta,\varphi)}{\partial\theta},$$

$$A_9 = \kappa(\rho,\theta,\varphi)\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\kappa_{33}}{\partial\varphi} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\kappa_{23}}{\partial\theta} + \frac{\rho}{\sin\theta}\frac{\partial\kappa_{13}}{\partial\rho} + \frac{1}{\sin\theta}\kappa_{13}\right) +$$

$$+\frac{1}{\sin^2\theta}\kappa_{33}\frac{\partial\kappa(\rho,\theta,\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{1}{\sin\theta}\kappa_{23}\frac{\partial\kappa(\rho,\theta,\varphi)}{\partial\theta} + \frac{\rho}{\sin\theta}\kappa_{13}\frac{\partial\kappa(\rho,\theta,\varphi)}{\partial\rho},$$

$$A_{10} = \frac{\rho^2}{\kappa_0\kappa(R)}\left(-\frac{2U}{\rho} + \frac{2U}{3\rho}\left(\frac{R}{I}\frac{\partial I}{\partial R} + 1\right)\right),\quad A_{11} = \frac{\rho}{\kappa_0\kappa(R)}\frac{2UR}{3}$$



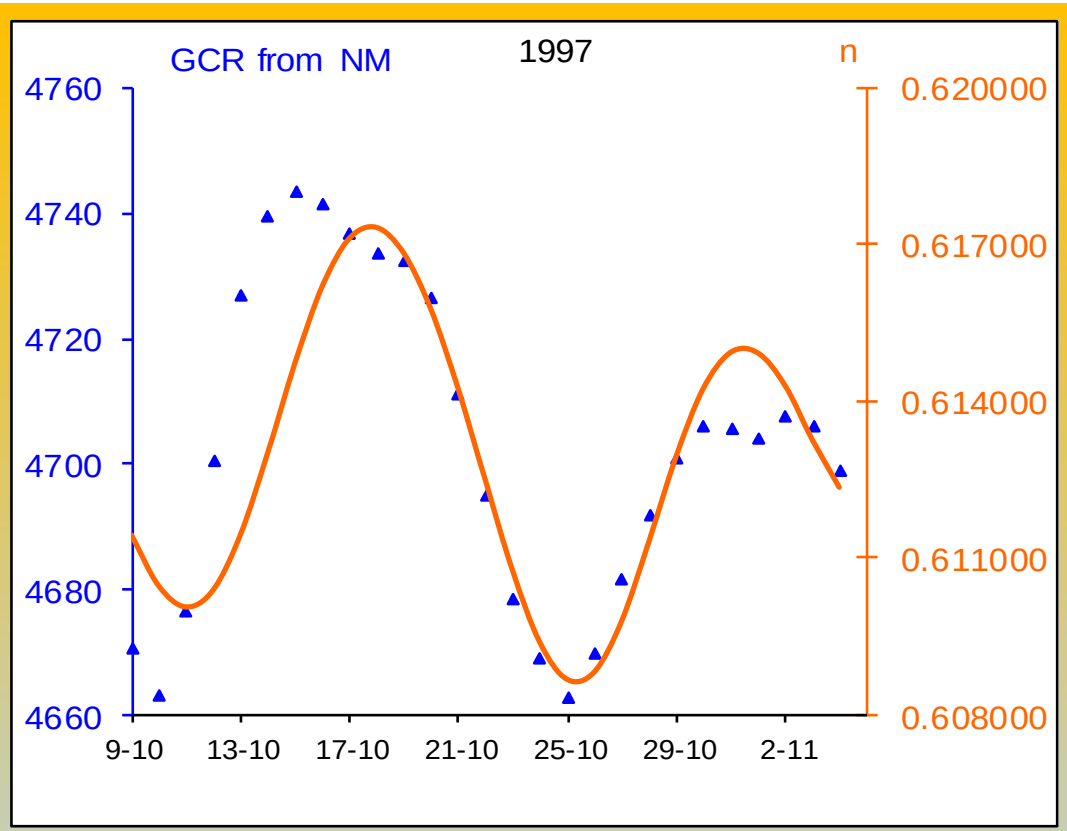


$$U = r_1 U_0 \left(0.91 + \left[0.16 \sin(\varphi + 3.23) + 0.14 \sin(2\varphi - 6.29)\right] \cdot g_1(\rho)\right)$$

$$B = r_2 B_0 \left(1.04 + \left[0.06 \sin(\varphi + 2.49) + 0.33 \sin(2\varphi - 5.57)\right] \cdot g_1(\rho)\right)$$

Dane wejściowe do matematycznego modelowania przy użyciu metody różnic skończonych, r_1=-89.3%, r_2=-80.4% (Gil & Alania, 2013)

SIEDLCE UNIVERSITY
OF NATURAL SCIENCES AND HUMANITIES



Wyniki matematycznego modelowania przy użyciu metody różnic skończonych (Gil & Alania, 2013)

SIEDLCE UNIVERSITY
OF NATURAL SCIENCES AND HUMANITIES

Podejście stochastyczne:

Backward in time

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_i A_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} B_{ij} B_{ij}^T \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j},$$

Forward in time

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(A_i \cdot F) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(B_{ij} B_{ij}^T \cdot F).$$

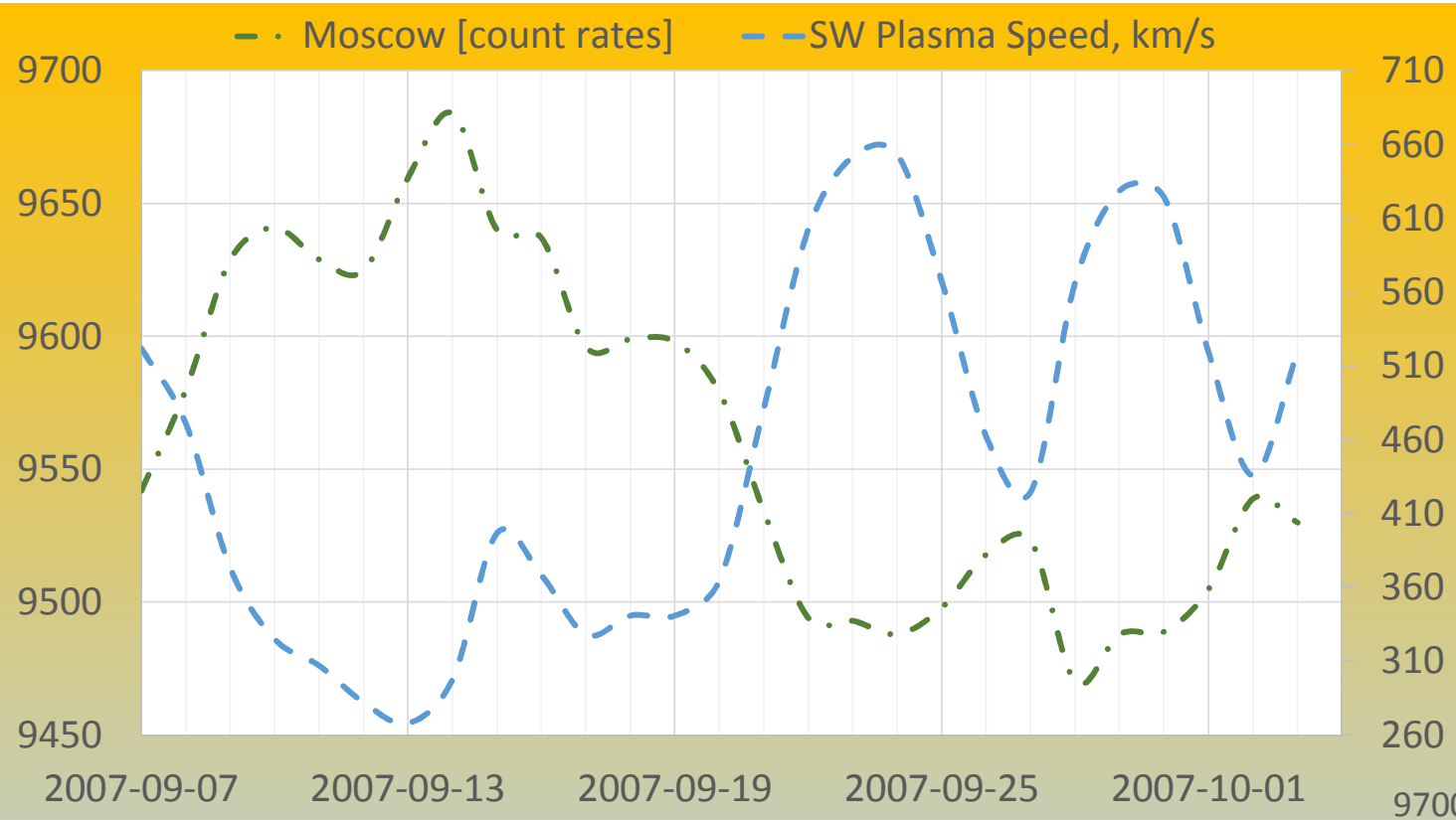
Gardiner, 2009

SDE:

$$d\vec{r} = \vec{A}_i \cdot dt + B_{ij} \cdot d\vec{W},$$

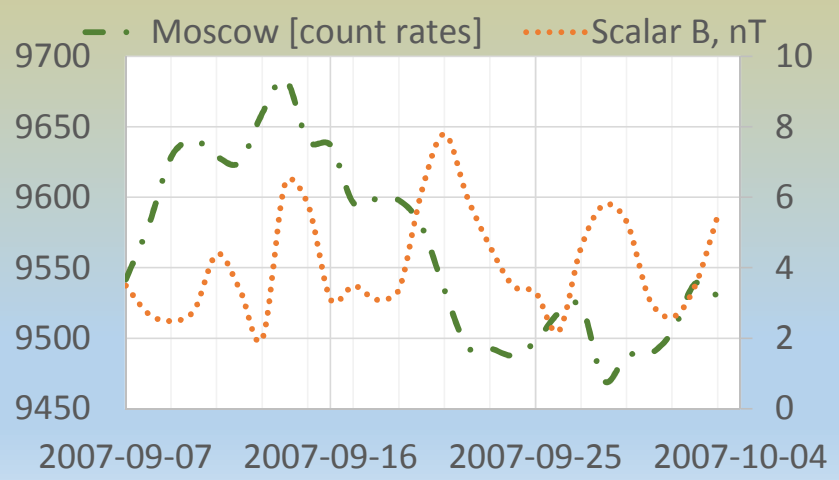
$$dW_i = \sqrt{dt} \cdot dw_i,$$

Kopp, Busching, Strauss and Potgieter, 2012

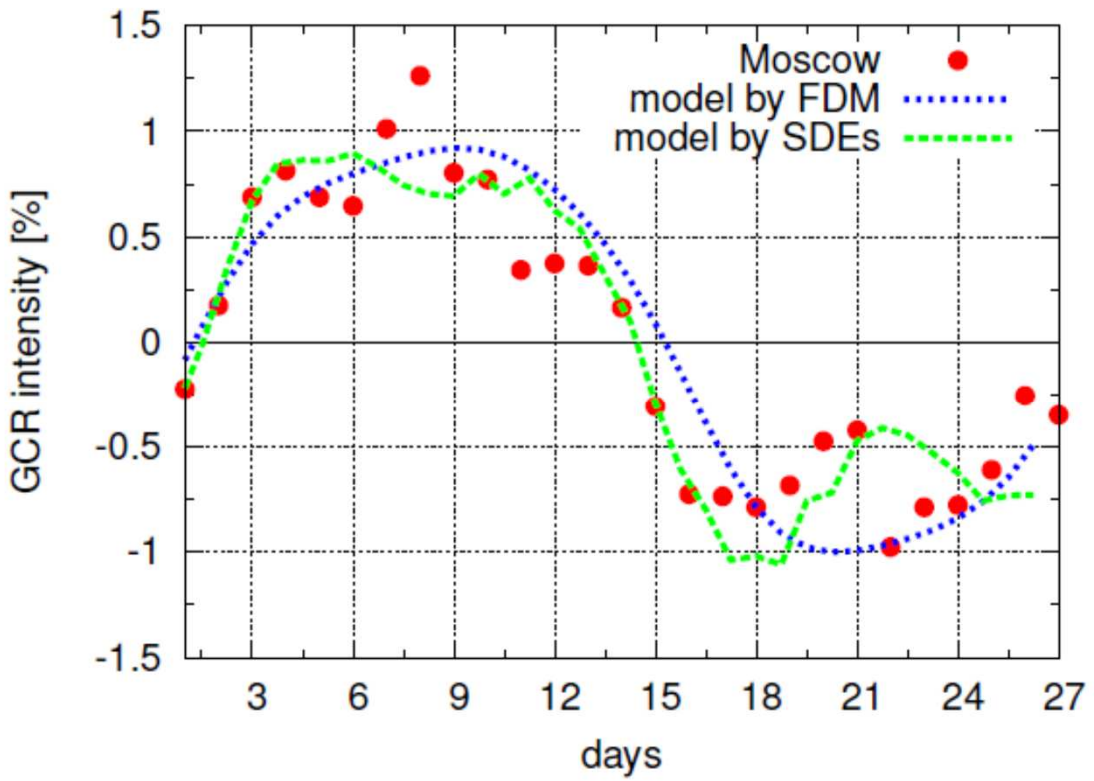


r(GCR,B)=-0.153

r(GCR,SWs)=-0.905



Dane wejściowe do matematycznego modelowania przy użyciu SDE



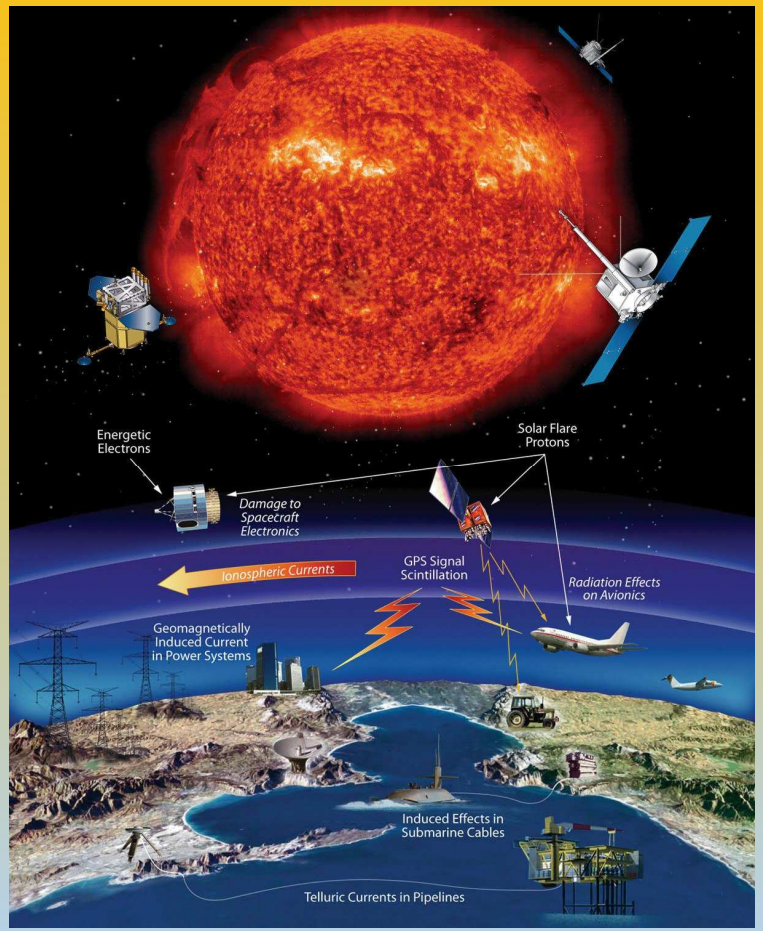
Wyniki matematycznego modelowania przy SDE w porównaniu z danymi eksperymentalnymi oraz rezultatami modelowania przy użyciu metody różnic skończonych.

Wawrzynczak, Modzelewska & Gil, 2015

SIEDLCE UNIVERSITY
OF NATURAL SCIENCES AND HUMANITIES

Zastosowania

- Pogoda kosmiczna



nasa.gov

Literatura:

Alania M. V. , Stochastic variations of galactic cosmic rays, Acta Phys. Pol. B 33, 1149-1166, 2002.

Alania M. V. , T. V. Dzhapiashvili, Proceedings of the 16th International Cosmic Ray Conference, Vol. 3. Published by the Institute for Cosmic Ray Research, University of Tokyo, 3-2-1, Midoricho Tanashi, Tokyo. Ed. by S. Miyake. International Union of Pure and Applied Physics. LCCN: 80-502341, 19-24, 1979.

Caballero-Lopez R.A., H. Moraal. J. Geophys. Res. 109, A01101, 2004.

Gardiner C.W., Handbook of stochastic methods. For physics, chemistry and the natural sciences Springer, 2009.

Gil, A.; Alania, M. V., Solar Physics, Volume 278, Issue 2, pp.447-455, 2012.

Gil, A.; Alania, M. V., Solar Physics, Volume 283, Issue 2, pp.565-578, 2013.

Kopp A., Busching I., Strauss R.D. and M.S. Potgieter, Computer Physics Communications 183, 530-542, 2012.

Jokipii, J. R.; Levy, E. H.; Hubbard, W. B., Astrophysical Journal, Part 1, vol. 213, p. 861-868, 1977.

Parker, E. N., Planetary and Space Science, Volume 13, Issue 1, p. 9-49, 1965.

Wawrzynczak A., Modzelewska R. & Gil A., Journal of Physics Conference Series, 2015 (zaakceptowane do publikacji).

Webber W.R., J.A. Lockwood, J. Geophys. Res. 106, 29323-29332, 2001.

SIEDLCE UNIVERSITY
OF NATURAL SCIENCES AND HUMANITIES

Dziękuję!

SIEDLCE UNIVERSITY
OF NATURAL SCIENCES AND HUMANITIES