

"Nikt nie jest samotną wyspą"

– teoria gier jako matematyczne narzędzie do rozwiązywania problemów podejmowania decyzji w sytuacji interakcji.

Zastosowania w różnych dziedzinach

Agnieszka Wiszniewska-Matyszek

Między teorią a zastosowaniami
– matematyka w działaniu
Będlewo, 26-05-2015

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Gra

- ▶ Nieformalnie, "z życia":

Gra – dowolna sytuacja, w której mamy co najmniej 2 jednostki (**gracze**) podejmujące decyzje (tu uwaga!), każda kieruje się swoim własnym celem (**zmaksymalizować wypłatę**), przy czym wypłata gracza zależy także od decyzji podjętych przez pozostałych graczy.

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wisniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Gra

► Nieformalnie, "z życia":

Gra – dowolna sytuacja, w której mamy co najmniej 2 jednostki (**gracze**) podejmujące decyzje (tu uwaga!), każda kieruje się swoim własnym celem (**zmaksymalizować wypłatę**), przy czym wypłata gracza **zależy także od decyzji podjętych przez pozostałych graczy**.

► Półformalnie:

Gra – dowolna sytuacja, w której każdy z co najmniej 2 **graczy** spośród dostępnych mu **strategii** wybiera taką, która maksymalizuje jego **funkcję wypłaty**, przy czym funkcje wypłaty graczy **zależą od całego profilu strategii** – wyboru decyzji wszystkich graczy.

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Gra

- ▶ Nieformalnie, "z życia":

Gra – dowolna sytuacja, w której mamy co najmniej 2 jednostki (**gracze**) podejmujące decyzje (tu uwaga!), każda kieruje się swoim własnym celem (**zmaksymalizować wypłatę**), przy czym wypłata gracza **zależy także od decyzji podjętych przez pozostałych graczy**.

- ▶ Półformalnie:

Gra – dowolna sytuacja, w której każdy z co najmniej 2 **graczy** spośród dostępnych mu **strategii** wybiera taką, która maksymalizuje jego **funkcję wypłaty**, przy czym funkcje wypłaty graczy **zależą od całego profilu strategii** – wyboru decyzji wszystkich graczy.

- ▶ **Strategia** – określa, jakie decyzje będziemy podejmować we wszystkich możliwych sytuacjach podczas gry (przez cały jej przebieg).

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Gra

- ▶ Nieformalnie, "z życia":

Gra – dowolna sytuacja, w której mamy co najmniej 2 jednostki (**gracze**) podejmujące decyzje (tu uwaga!), każda kieruje się swoim własnym celem (**zmaksymalizować wypłatę**), przy czym wypłata gracza **zależy także od decyzji podjętych przez pozostałych graczy**.

- ▶ Półformalnie:

Gra – dowolna sytuacja, w której każdy z co najmniej 2 **graczy** spośród dostępnych mu **strategii** wybiera taką, która maksymalizuje jego **funkcję wypłaty**, przy czym funkcje wypłaty graczy **zależą od całego profilu strategii** – wyboru decyzji wszystkich graczy.

- ▶ **Strategia** – określa, jakie decyzje będziemy podejmować we wszystkich możliwych sytuacjach podczas gry (przez cały jej przebieg).
- ▶ Strategia – funkcja przyporządkowująca każdej sytuacji w grze decyzję.

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordynacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

► Formalnie

Gra w postaci strategicznej jest definiowana przez:

- Zbiór graczy – najczęściej $I = \{1, \dots, n\}$;
- Zbiory strategii graczy: S_i ;
- Funkcje wypłaty graczy $P_i(S_1, \dots, S_n)$.

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

- ▶ Formalnie

Gra w postaci strategicznej jest definiowana przez:

- ▶ Zbiór graczy – najczęściej $I = \{1, \dots, n\}$;
- ▶ Zbiory strategii graczy: S_i ;
- ▶ Funkcje wypłaty graczy $P_i(S_1, \dots, S_n)$.

- ▶ S – profil strategii;

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

- ▶ Formalnie

Gra w postaci strategicznej jest definiowana przez:

- ▶ Zbiór graczy – najczęściej $I = \{1, \dots, n\}$;
- ▶ Zbiory strategii graczy: S_i ;
- ▶ Funkcje wypłaty graczy $P_i(S_1, \dots, S_n)$.

- ▶ S – profil strategii;

- ▶ Wprowadzimy wygodny inny zapis profilu, tak żeby podkreślić własny wybór gracza i
[s, S_{-i}] – profil S ze strategią gracza i zamienioną na s .

- **Równowaga Nasha** – taki wybór strategii przez graczy, że żadnemu nie opłaca się zmienić strategii, jeśli pozostali nie zmienili swoich.

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

- ▶ **Równowaga Nasha** – taki wybór strategii przez graczy, że żadnemu nie opłaca się zmienić strategii, jeśli pozostali nie zmienili swoich.
- ▶ Formalnie: **równowaga Nasha** – taki profil strategii S , że dla każdego gracza i i każdej strategii $s \in S_i$
 $P_i([s, S_{-i}]) \leq P_i(S)$.

- ▶ **Równowaga Nasha** – taki wybór strategii przez graczy, że żadnemu nie opłaca się zmienić strategii, jeśli pozostali nie zmienili swoich.
- ▶ Formalnie: **równowaga Nasha** – taki profil strategii S , że dla każdego gracza i i każdej strategii $s \in S_i$
 $P_i([s, S_{-i}]) \leq P_i(S)$.
- ▶ Jedyne profile w strategii, jaki może utrzymać się w grze.

Proste gry statyczne

- ▶ Jak zapisać grę, w której jest 2 graczy i każdy ma kilka strategii?

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Proste gry statyczne

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

- Jak zapisać grę, w której jest 2 graczy i każdy ma kilka strategii?

		Strategie gracza 2 ↓			
		a	b	c	d
Strategie gracza 1 →	A	(2, 3)	(-1, 5)	(5, 1)	(3, 6)
	B	(4, 1)	(17, 2)	(2, 1)	(1, 1)
	C	(4, 5)	(1, 7)	(0, 15)	(0, 2)
	D	(3, 6)	(1, 7)	(0, 12)	(-1, 3)

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Gra koordynacji

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

- Gra koordynacji, czyli którą stroną drogi jeździć

	P	L
P	$(1, 1)$	$(0, 0)$
L	$(0, 0)$	$(1, 1)$

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordynacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Gra koordynacji

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

- ▶ Gra koordynacji, czyli którą stroną drogi jeździć

	P	L
P	$(1, 1)$	$(0, 0)$
L	$(0, 0)$	$(1, 1)$

- ▶ Dwie równowagi Nasha (P, P) i (L, L) .

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordynacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Dylemat więźnia

- ▶ Dwóch kryminalistów, złapanych w kradzionym samochodzie, który był użyty do napadu na bank, zamkniętych w osobnych celach.
- ▶ Dostają od śledczego propozycję współpracy.

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Dylemat więźnia

- ▶ Dwóch kryminalistów, złapanych w kradzionym samochodzie, który był użyty do napadu na bank, zamkniętych w osobnych celach.
- ▶ Dostają od śledczego propozycję współpracy.

	S	NS
S	$(-15, -15)$	$(0, -20)$
NS	$(-20, 0)$	$(-3, -3)$

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Dylemat więźnia

- ▶ Dwóch kryminalistów, złapanych w kradzionym samochodzie, który był użyty do napadu na bank, zamkniętych w osobnych celach.
- ▶ Dostają od śledczego propozycję współpracy.

	S	NS
S	$(-15, -15)$	$(0, -20)$
NS	$(-20, 0)$	$(-3, -3)$

- ▶ Cokolwiek zrobi drugi z graczy, mnie opłaca się sypać.

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyskiel

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Dylemat więźnia

- ▶ Dwóch kryminalistów, złapanych w kradzionym samochodzie, który był użyty do napadu na bank, zamkniętych w osobnych celach.
- ▶ Dostają od śledczego propozycję współpracy.

	S	NS
S	$(-15, -15)$	$(0, -20)$
NS	$(-20, 0)$	$(-3, -3)$

- ▶ Cokolwiek zrobi drugi z graczy, mnie opłaca się sypać.
- ▶ Jedyna równowaga Nasha to (S, S).

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyskiel

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Dylemat więźnia

- ▶ Dwóch kryminalistów, złapanych w kradzionym samochodzie, który był użyty do napadu na bank, zamkniętych w osobnych celach.
- ▶ Dostają od śledczego propozycję współpracy.

	S	NS
S	$(-15, -15)$	$(0, -20)$
NS	$(-20, 0)$	$(-3, -3)$

- ▶ Cokolwiek zrobi drugi z graczy, mnie opłaca się sypać.
- ▶ Jedyna równowaga Nasha to (S, S).
- ▶ A przecież $-15 < -3$!

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyskiel

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Dylemat więźnia

- ▶ Dwóch kryminalistów, złapanych w kradzionym samochodzie, który był użyty do napadu na bank, zamkniętych w osobnych celach.
- ▶ Dostają od śledczego propozycję współpracy.

	S	NS
S	$(-15, -15)$	$(0, -20)$
NS	$(-20, 0)$	$(-3, -3)$

- ▶ Cokolwiek zrobi drugi z graczy, mnie opłaca się sypać.
- ▶ Jedyna równowaga Nasha to (S, S).
- ▶ A przecież $-15 < -3$!
- ▶ A dylemat więźnia, to nie tylko ta jedna konkretna gra, ale opis wielu sytuacji podejmowania decyzji na co dzień.

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Dylemat więźnia

- ▶ Dwóch kryminalistów, złapanych w kradzionym samochodzie, który był użyty do napadu na bank, zamkniętych w osobnych celach.
- ▶ Dostają od śledczego propozycję współpracy.

	S	NS
S	$(-15, -15)$	$(0, -20)$
NS	$(-20, 0)$	$(-3, -3)$

- ▶ Cokolwiek zrobi drugi z graczy, mnie opłaca się sypać.
- ▶ Jedyna równowaga Nasha to (S, S).
- ▶ A przecież $-15 < -3$!
- ▶ A dylemat więźnia, to nie tylko ta jedna konkretna gra, ale opis wielu sytuacji podejmowania decyzji na co dzień.
- ▶ Większość norm prawnych i kulturowych powstała, żeby wymuszać rozwiązanie kooperacyjne w dylematach więźnia lub ustalać, którą z równowag wybrać w grach kooperacji.

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

"Chicken" lub walka o terytorium

- ▶ Gra w tchórze, walka o terytorium albo jastrzębie i gołębie
Gra nastolatków z dwoma samochodami jadącymi naprzeciwko siebie.

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

"Chicken" lub walka o terytorium

- Gra w tchórza, walka o terytorium albo jastrzębie i gołębie

Gra nastolatków z dwoma samochodami jadącymi naprzeciwko siebie.

	Z	NZ
Z	(1, 1)	(0, 2)
NZ	(2, 0)	(-1, -1)

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

"Chicken" lub walka o terytorium

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

- ▶ Gra w tchórza, walka o terytorium albo jastrzębie i gołębie
Gra nastolatków z dwoma samochodami jadącymi naprzeciwko siebie.

	Z	NZ
Z	(1, 1)	(0, 2)
NZ	(2, 0)	(-1, -1)

- ▶ Dwie równowagi Nasha: (Z, NZ) i (NZ, Z).

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

"Chicken" lub walka o terytorium

- ▶ Gra w tchórze, walka o terytorium albo jastrzębie i gołębie
Gra nastolatków z dwoma samochodami jadącymi naprzeciwko siebie.

	Z	NZ
Z	(1, 1)	(0, 2)
NZ	(2, 0)	(-1, -1)

- ▶ Dwie równowagi Nasha: (Z, NZ) i (NZ, Z).
- ▶ Trzecia grupa norm prawnych i kulturowych: ustalanie ról w grach typu "chicken".

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

"Chicken" lub walka o terytorium

- ▶ Gra w tchórza, walka o terytorium albo jastrzębie i gołębie
Gra nastolatków z dwoma samochodami jadącymi naprzeciwko siebie.

	Z	NZ
Z	(1, 1)	(0, 2)
NZ	(2, 0)	(-1, -1)

- ▶ Dwie równowagi Nasha: (Z, NZ) i (NZ, Z).
- ▶ Trzecia grupa norm prawnych i kulturowych: ustalanie ról w grach typu "chicken".
- ▶ Czyli hierarchii.

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

"Matching pennies"

- ▶ *Matching pennies* czyli Zgaduj-zgadula, w której ręce złota kula

	O	R
O	$(-1, 1)$	$(1, -1)$
R	$(1, -1)$	$(-1, 1)$

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

"Matching pennies"

- ▶ *Matching pennies* czyli Zgaduj-zgadula, w której ręce złota kula

	O	R
O	$(-1, 1)$	$(1, -1)$
R	$(1, -1)$	$(-1, 1)$

- ▶ Nie ma równowagi Nasha.

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Zimna wojna

- Globalny konflikt nuklearny: USA (gracz 1) contra ZSRR (gracz 2)

Doradca wojskowy USA :

Musimy zapewnić krajowi bezpieczeństwo. Tak zaplanujemy system, żeby wstępnym atakiem móc zniszczyć siły ZSRR w 100% i tak rozlokujemy, żeby oni nie mogli tego zrobić.

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Zimna wojna

- Globalny konflikt nuklearny: USA (gracz 1) contra ZSRR (gracz 2)

Doradca wojskowy USA :

Musimy zapewnić krajowi bezpieczeństwo. Tak zaplanujemy system, żeby wstępnym atakiem móc zniszczyć siły ZSRR w 100% i tak rozlokujemy, żeby oni nie mogli tego zrobić.

	A	O
A	$(-90, -90)$	$(10, -100)$
O	$(-95, -40)$	$(0, 0)$

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Zimna wojna

- Globalny konflikt nuklearny: USA (gracz 1) contra ZSRR (gracz 2)

Doradca wojskowy USA :

Musimy zapewnić krajowi bezpieczeństwo. Tak zaplanujemy system, żeby wstępnym atakiem móc zniszczyć siły ZSRR w 100% i tak rozlokujemy, żeby oni nie mogli tego zrobić.

	A	O
A	$(-90, -90)$	$(10, -100)$
O	$(-95, -40)$	$(0, 0)$

Matematyk, specjalizujący się w teorii gier.

A jakie są równowagi Nasha?

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Zimna wojna

- Globalny konflikt nuklearny: USA (gracz 1) contra ZSRR (gracz 2)

Doradca wojskowy USA:

Musimy zapewnić krajowi bezpieczeństwo. Tak zaplanujemy system, żeby wstępnym atakiem móc zniszczyć siły ZSRR w 100% i tak rozlokujemy, żeby oni nie mogli tego zrobić.

	A	O
A	$(-90, -90)$	$(10, -100)$
O	$(-95, -40)$	$(0, 0)$

Matematyk, specjalizujący się w teorii gier.

A jakie są równowagi Nasha? Tylko (A, A)!

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Zimna wojna

- Globalny konflikt nuklearny: USA (gracz 1) contra ZSRR (gracz 2)

Doradca wojskowy USA:

Musimy zapewnić krajowi bezpieczeństwo. Tak zaplanujemy system, żeby wstępnym atakiem móc zniszczyć siły ZSRR w 100% i tak rozlokujemy, żeby oni nie mogli tego zrobić.

	A	O
A	$(-90, -90)$	$(10, -100)$
O	$(-95, -40)$	$(0, 0)$

Matematyk, specjalizujący się w teorii gier.

A jakie są równowagi Nasha? Tylko (A, A)!

Więc może lepiej:

	A	O
A	$(-90, -90)$	$(-40, -95)$
O	$(-95, -40)$	$(0, 0)$

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Zimna wojna

- Globalny konflikt nuklearny: USA (gracz 1) contra ZSRR (gracz 2)

Doradca wojskowy USA:

Musimy zapewnić krajowi bezpieczeństwo. Tak zaplanujemy system, żeby wstępnym atakiem móc zniszczyć siły ZSRR w 100% i tak rozlokujemy, żeby oni nie mogli tego zrobić.

	A	O
A	$(-90, -90)$	$(10, -100)$
O	$(-95, -40)$	$(0, 0)$

Matematyk, specjalizujący się w teorii gier.

A jakie są równowagi Nasha? Tylko (A, A)!

Więc może lepiej:

	A	O
A	$(-90, -90)$	$(-40, -95)$
O	$(-95, -40)$	$(0, 0)$

czyli tak zaplanujemy system, żeby wstępnym atakiem **nie** **móc** zniszczyć ich sił w 100%. I bądźmy przygotowani do odwetu, a nie ataku. I niech oni o tym wiedzą! Bo równowagi

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Bardziej złożone gry i inne postaci gier

- ▶ gry kooperacyjne – gracze mogą się umawiać;

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Bardziej złożone gry i inne postaci gier

- ▶ gry kooperacyjne – gracze mogą się umawiać;
- ▶ gry z nieskończenie wieloma strategiami – bardziej realistyczne w zastosowaniach ekonomicznych;

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Bardziej złożone gry i inne postaci gier

- ▶ gry kooperacyjne – gracze mogą się umawiać;
- ▶ gry z nieskończenie wieloma strategiami – bardziej realistyczne w zastosowaniach ekonomicznych;
- ▶ gry z nieskończenie wieloma graczami – dobrze opisują zjawiska, kiedy podejmujących decyzje jest wielu – w ekonomii już 30 graczy zachowuje się jak modelowe continuum;

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Bardziej złożone gry i inne postaci gier

- ▶ gry kooperacyjne – gracze mogą się umawiać;
- ▶ gry z nieskończenie wieloma strategiami – bardziej realistyczne w zastosowaniach ekonomicznych;
- ▶ gry z nieskończenie wieloma graczami – dobrze opisują zjawiska, kiedy podejmujących decyzje jest wielu – w ekonomii już 30 graczy zachowuje się jak modelowe continuum;
- ▶ gry ewolucyjne – zastosowania m.in. w biologii i socjologii;

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Bardziej złożone gry i inne postaci gier

- ▶ gry kooperacyjne – gracze mogą się umawiać;
- ▶ gry z nieskończenie wieloma strategiami – bardziej realistyczne w zastosowaniach ekonomicznych;
- ▶ gry z nieskończenie wieloma graczami – dobrze opisują zjawiska, kiedy podejmujących decyzje jest wielu – w ekonomii już 30 graczy zachowuje się jak modelowe continuum;
- ▶ gry ewolucyjne – zastosowania m.in. w biologii i socjologii;
- ▶ gry dynamiczne – zastosowania m.in. w eksploatacji zasobów naturalnych;

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Gry dynamiczne w najprostszym ujęciu

- ▶ rozgrywane **w czasie**, dyskretnym $\mathbb{T} = 0, \dots, T$ lub ciągłym $\mathbb{T} = [0, T)$ dla T skończonego lub nieskończonego;

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Gry dynamiczne w najprostszym ujęciu

- ▶ rozgrywane **w czasie**, dyskretnym $\mathbb{T} = 0, \dots, T$ lub ciągłym $\mathbb{T} = [0, T)$ dla T skończonego lub nieskończonego;
- ▶ w pewnym **systemie**, o zbiorze stanów $\mathbb{X}$.

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Gry dynamiczne w najprostszym ujęciu

- ▶ rozgrywane **w czasie**, dyskretnym $\mathbb{T} = 0, \dots, T$ lub ciągłym $\mathbb{T} = [0, T)$ dla T skończonego lub nieskończonego;
- ▶ w pewnym **systemie**, o zbiorze stanów $\mathbb{X}$.
- ▶ Gracz i w każdej chwili $\mathbb{T}$ wybiera **decyzję** ze zbioru $\mathbb{D}_i$.

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Gry dynamiczne w najprostszym ujęciu

- ▶ rozgrywane **w czasie**, dyskretnym $\mathbb{T} = 0, \dots, T$ lub ciągłym $\mathbb{T} = [0, T)$ dla T skończonego lub nieskończonego;
- ▶ w pewnym **systemie**, o zbiorze stanów $\mathbb{X}$.
- ▶ Gracz i w każdej chwili $\mathbb{T}$ wybiera **decyzję** ze zbioru $\mathbb{D}_i$.
- ▶ A więc strategie $\mathbb{S}_i$ – funkcje z $\mathbb{T}$ w $\mathbb{D}_i$, mieralne w przypadku czasu ciągłego.

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Gry dynamiczne w najprostszym ujęciu

- ▶ rozgrywane **w czasie**, dyskretnym $\mathbb{T} = 0, \dots, T$ lub ciągłym $\mathbb{T} = [0, T)$ dla T skończonego lub nieskończonego;
- ▶ w pewnym **systemie**, o zbiorze stanów $\mathbb{X}$.
- ▶ Gracz i w każdej chwili $\mathbb{T}$ wybiera **decyzję** ze zbioru $\mathbb{D}_i$.
- ▶ A więc strategie $\mathbb{S}_i$ – funkcje z $\mathbb{T}$ w $\mathbb{D}_i$, mieralne w przypadku czasu ciągłego.
- ▶ Wypłata ma postać $\Pi_i(S) =$
 - ▶ $= \sum_{t=0}^T P_i(S(t), X(t))$ przy czasie dyskretnym,
 - ▶ $= \int_0^T P_i(S(t), X(t))dt$ przy czasie ciągłym;

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Gry dynamiczne w najprostszym ujęciu

- ▶ rozgrywane **w czasie**, dyskretnym $\mathbb{T} = 0, \dots, T$ lub ciągłym $\mathbb{T} = [0, T)$ dla T skończonego lub nieskończonego;
- ▶ w pewnym **systemie**, o zbiorze stanów $\mathbb{X}$.
- ▶ Gracz i w każdej chwili $\mathbb{T}$ wybiera **decyzję** ze zbioru $\mathbb{D}_i$.
- ▶ A więc strategie $\mathbb{S}_i$ – funkcje z $\mathbb{T}$ w $\mathbb{D}_i$, mieralne w przypadku czasu ciągłego.
- ▶ Wypłata ma postać $\Pi_i(S) =$
 - ▶ $= \sum_{t=0}^T P_i(S(t), X(t))$ przy czasie dyskretnym,
 - ▶ $= \int_0^T P_i(S(t), X(t)) dt$ przy czasie ciągłym;
- ▶ gdzie X jest zdefiniowane przez równania
 - ▶ $X(t+1) = \phi(X(t), S(t))$ przy czasie dyskretnym,
 - ▶ $\dot{X}(t) = \phi(X(t), S(t))$ przy czasie ciągłym;
 - ▶ z warunkiem początkowym $X(0) = x_0$.

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiśniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Gry dynamiczne w najprostszym ujęciu

- ▶ rozgrywane **w czasie**, dyskretnym $\mathbb{T} = 0, \dots, T$ lub ciągłym $\mathbb{T} = [0, T)$ dla T skończonego lub nieskończonego;
- ▶ w pewnym **systemie**, o zbiorze stanów $\mathbb{X}$.
- ▶ Gracz i w każdej chwili $\mathbb{T}$ wybiera **decyzję** ze zbioru $\mathbb{D}_i$.
- ▶ A więc strategie $\mathbb{S}_i$ – funkcje z $\mathbb{T}$ w $\mathbb{D}_i$, mieralne w przypadku czasu ciągłego.
- ▶ Wypłata ma postać $\Pi_i(S) =$
 - ▶ $= \sum_{t=0}^T P_i(S(t), X(t))$ przy czasie dyskretnym,
 - ▶ $= \int_0^T P_i(S(t), X(t)) dt$ przy czasie ciągłym;
- ▶ gdzie X jest zdefiniowane przez równania
 - ▶ $X(t+1) = \phi(X(t), S(t))$ przy czasie dyskretnym,
 - ▶ $\dot{X}(t) = \phi(X(t), S(t))$ przy czasie ciągłym;
 - ▶ z warunkiem początkowym $X(0) = x_0$.
- ▶ Obliczenie równowagi Nasha w grze dynamicznej – równoczesne rozwiązanie problemów optymalizacji dynamicznej dla wszystkich graczy – każdy względem swojej strategii.

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszkiewicz

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

- **Równowaga Nasha** – taki profil strategii, że żadnemu z graczy nie opłaca się zmienić strategii, jeśli pozostali nie zmienili swoich.

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

- ▶ **Równowaga Nasha** – taki profil strategii, że żadnemu z graczy nie opłaca się zmienić strategii, jeśli pozostali nie zmienili swoich.
- ▶ Równowagi Nasha – jedyne profile strategii, które mogą utrzymać się w grze.

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

- ▶ **Równowaga Nasha** – taki profil strategii, że żadnemu z graczy nie opłaca się zmienić strategii, jeśli pozostali nie zmienili swoich.
- ▶ Równowagi Nasha – jedyne profile strategii, które mogą utrzymać się w grze.
- ▶ Jeśli jest jedna równowaga Nasha, racjonalni gracze będą ją grali.

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

- ▶ **Równowaga Nasha** – taki profil strategii, że żadnemu z graczy nie opłaca się zmienić strategii, jeśli pozostali nie zmienili swoich.
- ▶ Równowagi Nasha – jedyne profile strategii, które mogą utrzymać się w grze.
- ▶ Jeśli jest jedna równowaga Nasha, racjonalni gracze będą ją grali.
- ▶ Jeśli jest więcej niż jedna równowaga Nasha, to nie wiadomo, która będzie grana, ale **jak już gracze ją wybiorą**, to sama informacja o tym jest przydatna każdemu z graczy i gracze nie tracą na poinformowaniu o tym, co grają.

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

- ▶ **Równowaga Nasha** – taki profil strategii, że żadnemu z graczy nie opłaca się zmienić strategii, jeśli pozostali nie zmienili swoich.
- ▶ Równowagi Nasha – jedyne profile strategii, które mogą utrzymać się w grze.
- ▶ Jeśli jest jedna równowaga Nasha, racjonalni gracze będą ją grali.
- ▶ Jeśli jest więcej niż jedna równowaga Nasha, to nie wiadomo, która będzie grana, ale **jak już gracze ją wybiorą**, to sama informacja o tym jest przydatna każdemu z graczy i gracze nie tracą na poinformowaniu o tym, co grają.
- ▶ W grach dynamicznych obliczanie równowagi Nasha łączy ze sobą optymalizację dynamiczną z szukaniem punktu stałego w przestrzeni funkcji – a więc zawsze znajdzie się ciekawa praca dla matematyka.

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

- Co robić, jak **nie ma** równowagi Nasha?

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

- ▶ Co robić, jak **nie ma** równowagi Nasha?
- ▶ Jakikolwiek profil strategii byłby wybierany, gracz traci na zdradzeniu informacji, którą strategię wybiera.

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

- ▶ Co robić, jak **nie ma** równowagi Nasha?
- ▶ Jakikolwiek profil strategii byłby wybierany, gracz traci na zdradzeniu informacji, którą strategię wybiera.
- ▶ Co jeśli grałbym w tę grę, na przykład „Matching pennies” wielokrotnie z tym samym przeciwnikiem?

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

- ▶ Co robić, jak **nie ma** równowagi Nasha?
- ▶ Jakikolwiek profil strategii byłby wybierany, gracz traci na zdradzeniu informacji, którą strategię wybiera.
- ▶ Co jeśli grałbym w tę grę, na przykład „Matching pennies” wielokrotnie z tym samym przeciwnikiem?
- ▶ I doszliśmy do koncepcji **strategii mieszanych**.

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

- ▶ Co robić, jak **nie ma** równowagi Nasha?
- ▶ Jakikolwiek profil strategii byłby wybierany, gracz traci na zdradzeniu informacji, którą strategię wybiera.
- ▶ Co jeśli grałbym w tę grę, na przykład „Matching pennies” wielokrotnie z tym samym przeciwnikiem?
- ▶ I doszliśmy do koncepcji **strategii mieszanych**.
- ▶ W strategii mieszanej gracz losuje z ustalonym przez siebie prawdopodobieństwem, którą z dotychczasowych strategii (strategii czystych) wybierze.

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

- ▶ Co robić, jak **nie ma** równowagi Nasha?
- ▶ Jakikolwiek profil strategii byłby wybierany, gracz traci na zdradzeniu informacji, którą strategię wybiera.
- ▶ Co jeśli grałbym w tę grę, na przykład „Matching pennies” wielokrotnie z tym samym przeciwnikiem?
- ▶ I doszliśmy do koncepcji **strategii mieszanych**.
- ▶ W strategii mieszanej gracz losuje z ustalonym przez siebie prawdopodobieństwem, którą z dotychczasowych strategii (strategii czystych) wybierze.
- ▶ Strategii mieszanych jest znacznie więcej niż czystych.

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

- ▶ Co robić, jak **nie ma** równowagi Nasha?
- ▶ Jakikolwiek profil strategii byłby wybierany, gracz traci na zdradzeniu informacji, którą strategię wybiera.
- ▶ Co jeśli grałbym w tę grę, na przykład „Matching pennies” wielokrotnie z tym samym przeciwnikiem?
- ▶ I doszliśmy do koncepcji **strategii mieszanych**.
- ▶ W strategii mieszanej gracz losuje z ustalonym przez siebie prawdopodobieństwem, którą z dotychczasowych strategii (strategii czystych) wybierze.
- ▶ Strategii mieszanych jest znacznie więcej niż czystych.
- ▶ Każda gra ze skończenie wieloma strategiami ma równowagę Nasha w strategiach mieszanych.

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie

Dziękuję za uwagę!

"Nikt nie jest samotną wyspą"

Agnieszka
Wiszniewska-
Matyszek

Co to jest gra?

Równowaga Nasha

Proste gry
statyczne

Przykłady

Koordinacja

Dylemat więźnia

Chicken

Matching pennies

Globalny konflikt nuklearny

Bardziej złożone
gry

Gry dynamiczne

Quasi-
podsumowanie