O pewnych klasach funkcji prawie okresowych (niekoniecznie ograniczonych)

Dariusz Bugajewski

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, Poznań

Będlewo, 25-30 maja 2015

Funkcje prawie okresowe w sensie Bohra

Definicja

Zbiór $E \subseteq \mathbb{R}$ nazywamy względnie gęstym w sensie Bohra, jeśli istnieje liczba $l > 0$ taka, że w każdym przedziale otwartym o długości l, zawartym w $\mathbb{R}$, istnieje co najmniej jeden element z E.

Funkcje prawie okresowe w sensie Bohra

Definicja

Zbiór $E \subseteq \mathbb{R}$ nazywamy względnie gęstym w sensie Bohra, jeśli istnieje liczba $l > 0$ taka, że w każdym przedziale otwartym o długości l, zawartym w $\mathbb{R}$, istnieje co najmniej jeden element z E.

Definicja

Funkcję ciągłą $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy prawie okresową w sensie Bohra, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ zbiór $\{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t+\tau) - f(t)| \leqslant \varepsilon\}$ jest względnie gęsty w sensie Bohra.

Funkcje prawie okresowe w sensie Bohra

Definicja

Zbiór $E \subseteq \mathbb{R}$ nazywamy względnie gęstym w sensie Bohra, jeśli istnieje liczba $l > 0$ taka, że w każdym przedziale otwartym o długości l, zawartym w $\mathbb{R}$, istnieje co najmniej jeden element z E.

Definicja

Funkcję ciągłą $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy prawie okresową w sensie Bohra, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ zbiór $\{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t+\tau) - f(t)| \leqslant \varepsilon\}$ jest względnie gęsty w sensie Bohra.

Twierdzenie (Kryterium Bochnera)

Funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie prawie okresowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$, istnieje podciąg $(\tau_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ taki, że $(f(t+\tau_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$.

Funkcje prawie okresowe w sensie Lewitana

Definicja

Funkcję ciągłą $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy prawie okresową w sensie Lewitana, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ i dla każdego skończonego zbioru $M \subseteq \mathbb{R}$, istnieje względnie gęsty zbiór E w $\mathbb{R}$ taki, że

$$E - E \subseteq \{\tau \in \mathbb{R} : |f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon \text{ dla wszystkich } t \in M\}.$$

Funkcje prawie okresowe w sensie Lewitana

Definicja

Funkcję ciągłą $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy prawie okresową w sensie Lewitana, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ i dla każdego skończonego zbioru $M \subseteq \mathbb{R}$, istnieje względnie gęsty zbiór E w $\mathbb{R}$ taki, że

$$E - E \subseteq \{\tau \in \mathbb{R} : |f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon \text{ dla wszystkich } t \in M\}.$$

Rozważmy funkcję $f(t) = 2 + \cos(t) + \cos(\sqrt{2}t)$ dla $t \in \mathbb{R}$.

- Funkcja f jest jednostajnie prawie okresowa.
- Funkcja $1/f$ jest prawie okresowa w sensie Lewitana oraz nieograniczona.
- Funkcja $\sin(f)$ jest prawie okresowa w sensie Lewitana oraz ograniczona.

Funkcje prawie okresowe w sensie Lewitana

Twierdzenie

Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. NWSR:

- funkcja f jest prawie okresowa w sensie Lewitana;
- dla każdego ciągu $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ istnieje podciąg $(\tau_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ taki, że
$$\lim_{\min\{l,k\}\to\infty} f(t+\tau_{n_k}-\tau_{n_l}) = f(t) \text{ dla każdego } t \in \mathbb{R};$$
- funkcja $f\colon (\mathbb{R},\mathcal{B}) \to (\mathbb{R},\mathcal{E})$ jest ciągła; $\mathcal{B}$ oraz $\mathcal{E}$ oznaczają tutaj odpowiednio topologię Bohra oraz topologię euklidesową.

Funkcje prawie okresowe w sensie Lewitana

Twierdzenie

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. NWSR:

- funkcja f jest prawie okresowa w sensie Lewitana;
- dla każdego ciągu $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ istnieje podciąg $(\tau_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ taki, że
$$\lim_{\min\{l,k\}\to\infty} f(t+\tau_{n_k}-\tau_{n_l}) = f(t) \text{ dla każdego } t \in \mathbb{R};$$
- funkcja $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{E})$ jest ciągła; $\mathcal{B}$ oraz $\mathcal{E}$ oznaczają tutaj odpowiednio topologię Bohra oraz topologię euklidesową.

Definicja

Topologią Bohra na $\mathbb{R}$ nazywamy najmocniejszą topologię, słabszą niż topologia euklidesowa, przy której $\mathbb{R}$ jest całkowicie ograniczoną grupą topologiczną.

Podstawowe własności funkcji LAP

- Jeśli f, g są funkcjami LAP, to wówczas $f \pm g$ oraz $f \cdot g$ są również funkcjami LAP.

Podstawowe własności funkcji LAP

- Jeśli f, g są funkcjami LAP, to wówczas $f \pm g$ oraz $f \cdot g$ są również funkcjami LAP.
- Jeśli f is funkcją LAP oraz $f(t) \neq 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$, to $1/f$ jest również funkcją LAP.

Podstawowe własności funkcji LAP

- Jeśli f, g są funkcjami LAP, to wówczas $f \pm g$ oraz $f \cdot g$ są również funkcjami LAP.
- Jeśli f is funkcją LAP oraz $f(t) \neq 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$, to $1/f$ jest również funkcją LAP.
- Granica jednostajnie zbieżnego ciągu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ funkcji LAP jest funkcją LAP.

Podstawowe własności funkcji LAP

- Jeśli f, g są funkcjami LAP, to wówczas $f \pm g$ oraz $f \cdot g$ są również funkcjami LAP.
- Jeśli f is funkcją LAP oraz $f(t) \neq 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$, to $1/f$ jest również funkcją LAP.
- Granica jednostajnie zbieżnego ciągu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ funkcji LAP jest funkcją LAP.
- Jeśli f jest funkcją LAP i $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to superpozycja $g \circ f$ jest funkcją LAP.

Przestrzeń funkcji prawie okresowych w sensie Lewitana

Twierdzenie

$(LAP(\mathbb{R}), d)$ jest zupełną przestrzenią metryczną, gdzie

$$d(f,g) = \min\{1, \|f-g\|_\infty\} \quad \text{dla} \quad f,g \in LAP(\mathbb{R}).$$

Przestrzeń funkcji prawie okresowych w sensie Lewitana

Twierdzenie

$(LAP(\mathbb{R}), d)$ jest zupełną przestrzenią metryczną, gdzie

$$d(f,g) = \min\{1, \|f-g\|_\infty\} \quad \text{dla} \quad f,g \in LAP(\mathbb{R}).$$

Topologia zbieżności jednostajnej na przestrzeni $LAP(\mathbb{R})$ nie jest liniowa, ponieważ mnożenie przez skalary nie jest ciągłe.

Przestrzeń funkcji prawie okresowych w sensie Lewitana

Twierdzenie

$(LAP(\mathbb{R}), d)$ jest zupełną przestrzenią metryczną, gdzie

$$d(f,g) = \min\{1, \|f-g\|_\infty\} \quad \text{dla} \quad f,g \in LAP(\mathbb{R}).$$

Topologia zbieżności jednostajnej na przestrzeni $LAP(\mathbb{R})$ nie jest liniowa, ponieważ mnożenie przez skalary nie jest ciągłe.

Twierdzenie

Dla dowolnej funkcji ciągłej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ istnieje ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcji LAP, który jest niemal jednostajnie zbieżny do f, to znaczy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega do f, jednostajnie na każdym zwartym podzbiorze zbioru $\mathbb{R}$.

Funkcje μ-prawie okresowe

Niech $\mathcal{L}$ będzie σ-algebrą podzbiorów zbioru $\mathbb{R}$, które są mierzalne w sensie Lebesgue'a, μ – miarą Lebesgue'a na $\mathcal{L}$ oraz niech $L^0(\mathbb{R})$ będzie przestrzenią wszystkich $\mathcal{L}$-mierzalnych funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Funkcje μ-prawie okresowe

Niech $\mathcal{L}$ będzie σ-algebrą podzbiorów zbioru $\mathbb{R}$, które są mierzalne w sensie Lebesgue'a, μ – miarą Lebesgue'a na $\mathcal{L}$ oraz niech $L^0(\mathbb{R})$ będzie przestrzenią wszystkich $\mathcal{L}$-mierzalnych funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definicja

Funkcję $f \in L^0(\mathbb{R})$ nazywamy μ-prawie okresową, jeżeli dla każdych $\varepsilon > 0$ oraz $\eta > 0$, zbiór

$$\left\{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{u \in \mathbb{R}} \mu(\{x \in [u, u+1] : |f(t+\tau) - f(t)| \geqslant \eta\}) \leqslant \varepsilon\right\}$$

jest względnie gęsty. Symbolem $M(\mathbb{R})$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich funkcji μ-prawie okresowych.

Funkcje μ-prawie okresowe

Dla $\eta > 0$ oraz $f, g \in L^0(\mathbb{R})$ definiujemy

$$D(\eta; f, g) := \sup_{u \in \mathbb{R}} \mu\big(\{x \in [u, u+1] : |f(x) - g(x)| \geqslant \eta\}\big).$$

Funkcje μ-prawie okresowe

Dla $\eta > 0$ oraz $f, g \in L^0(\mathbb{R})$ definiujemy

$$D(\eta; f, g) := \sup_{u \in \mathbb{R}} \mu\big(\{x \in [u, u+1] : |f(x) - g(x)| \geqslant \eta\}\big).$$

Definicja

Ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $f_n \in L^0(\mathbb{R})$ dla $n \in \mathbb{N}$, nazywamy D-zbieżnym do funkcji $f \in L^0(\mathbb{R})$, jeśli spełniony jest następujący warunek:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \eta > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad D(\eta; f_n, f) < \varepsilon.$$

Funkcję f nazywamy D-granicą ciągu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Własności funkcji μ-prawie okresowych

- Niech $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem liczb dodatnich, zbieżnym do zera. Definiujemy

$$L_b^0(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^0(\mathbb{R}) : \lim_{n\to\infty} \sup_{u\in\mathbb{R}} \mu\left(\{x \in [u, u+1] : |f(x)| \geqslant \tfrac{1}{\lambda_n}\}\right) = 0 \right\}.$$

Jeśli f jest μ-prawie okresowa, to $f \in L_b^0(\mathbb{R})$.

Własności funkcji μ-prawie okresowych

- Niech $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem liczb dodatnich, zbieżnym do zera. Definiujemy

  $$L_b^0(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^0(\mathbb{R}) : \lim_{n\to\infty} \sup_{u\in\mathbb{R}} \mu\left(\{x \in [u, u+1] : |f(x)| \geqslant \tfrac{1}{\lambda_n}\}\right) = 0 \right\}.$$

  Jeśli f jest μ-prawie okresowa, to $f \in L_b^0(\mathbb{R})$.

- Jeśli f, g są funkcjami μ-prawie okresowymi, to wówczas $f \pm g$ oraz $f \cdot g$ są również funkcjami μ-prawie okresowymi.

Własności funkcji μ-prawie okresowych

- Niech $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$, gdzie $\Omega = \{x + iy \in \mathbb{C} : -a < y < a\}$, $a > 0$, będzie ograniczoną funkcją holomorficzną. Załóżmy, że funkcja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $g(x) = F(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest prawie okresowa w sensie Bohra. Wówczas funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{g(x)} & \text{dla } x \in \mathbb{R} \text{ takich, że } g(x) \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \text{ takich, że } g(x) = 0, \end{cases}$$

jest μ-prawie okresowa.

Własności funkcji μ-prawie okresowych

- Niech $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$, gdzie $\Omega = \{x + iy \in \mathbb{C} : -a < y < a\}$, $a > 0$, będzie ograniczoną funkcją holomorficzną. Załóżmy, że funkcja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $g(x) = F(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest prawie okresowa w sensie Bohra. Wówczas funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{g(x)} & \text{dla } x \in \mathbb{R} \text{ takich, że } g(x) \neq 0, \\[2ex] 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \text{ takich, że } g(x) = 0, \end{cases}$$

  jest μ-prawie okresowa.

- Jeśli ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcji μ-prawie okresowych jest D-zbieżny do funkcji $f \in L^0(\mathbb{R})$, to $f \in M(\mathbb{R})$.

Definicja

Funkcjonał $\|\cdot\| : L^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ definiujemy wzorem

$$\|f\| = \sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+1} \frac{|f(t)|}{1+|f(t)|}\mathrm{d}t, \quad \text{gdzie } f \in L^0(\mathbb{R}).$$

Przestrzeń funkcji μ-prawie okresowych

Definicja

Funkcjonał $\|\cdot\|: L^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ definiujemy wzorem

$$\|f\| = \sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+1} \frac{|f(t)|}{1+|f(t)|}\mathrm{d}t, \quad \text{gdzie } f \in L^0(\mathbb{R}).$$

Przy pomocy powyższego funkcjonału definiujemy w klasyczny sposób metrykę na $L^0(\mathbb{R})$, która po obcięciu do $L^0_b(\mathbb{R})$ jest zupełna. Ponadto można udowodnić, że ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $f_n \in L^0(\mathbb{R})$ dla $n \in \mathbb{N}$, jest D-zbieżny do funkcji $f \in L^0(\mathbb{R})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do f względem metryki generowanej przez ten funkcjonał.

Przestrzeń funkcji μ-prawie okresowych

Definicja

Funkcjonał $\|\cdot\|: L^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ definiujemy wzorem

$$\|f\| = \sup_{u \in \mathbb{R}} \int_u^{u+1} \frac{|f(t)|}{1+|f(t)|} \mathrm{d}t, \quad \text{gdzie } f \in L^0(\mathbb{R}).$$

Przy pomocy powyższego funkcjonału definiujemy w klasyczny sposób metrykę na $L^0(\mathbb{R})$, która po obcięciu do $L_b^0(\mathbb{R})$ jest zupełna. Ponadto można udowodnić, że ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $f_n \in L^0(\mathbb{R})$ dla $n \in \mathbb{N}$, jest D-zbieżny do funkcji $f \in L^0(\mathbb{R})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do f względem metryki generowanej przez ten funkcjonał.

Przestrzeń $(M(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ jest domkniętą podprzestrzenią zupełnej przestrzeni $(L_b^0(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$, co oczywiście implikuje, że jest to przestrzeń zupełna.

Nieliniowe operatory superpozycji w $(LAP(\mathbb{R}), d)$

Twierdzenie

Operator superpozycji F, generowany przez funkcję $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, działa w przestrzeni $(LAP(\mathbb{R}), d)$ i jest jednostajnie ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

- dla każdego $u \in \mathbb{R}$ funkcja $s \mapsto f(s, u)$ jest funkcją LAP;
- funkcja $u \mapsto f(t, u)$ jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$, jednostajnie względem $t \in \mathbb{R}$, to znaczy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że $\sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t,u) - f(t,v)| < \varepsilon$, jeśli tylko $|u - v| < \delta$ dla $u, v \in \mathbb{R}$.

Splot funkcji LAP

Twierdzenie

Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ograniczoną funkcją LAP oraz niech $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a. Wówczas splot $f * g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ograniczony i prawie okresowy w sensie Lewitana.

Splot funkcji LAP

Twierdzenie

Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ograniczoną funkcją LAP oraz niech $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a. Wówczas splot $f * g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ograniczony i prawie okresowy w sensie Lewitana.

Nie istnieje nietrywialna oraz ograniczona funkcja LAP, która byłaby całkowalna w sensie Lebesgue'a z p-tą potęgą, gdzie $1 < p < +\infty$.

Splot funkcji LAP

Twierdzenie

Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ograniczoną funkcją LAP oraz niech $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a. Wówczas splot $f * g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ograniczony i prawie okresowy w sensie Lewitana.

Nie istnieje nietrywialna oraz ograniczona funkcja LAP, która byłaby całkowalna w sensie Lebesgue'a z p-tą potęgą, gdzie $1 < p < +\infty$.

Uwaga

Splot nieograniczonej funkcji LAP z funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a może nie istnieć.

Splot funkcji μ-prawie okresowych

Uwaga

Splot funkcji μ-prawie okresowej z funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a może nie istnieć.

Splot funkcji μ-prawie okresowych

Uwaga

Splot funkcji μ-prawie okresowej z funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a może nie istnieć.

Uwaga

Istnienie splotu funkcji μ-prawie okresowej z funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a nie musi implikować, że jest on funkcją μ-prawie okresową.

Splot funkcji μ-prawie okresowych

Definicja

Funkcję $g_\lambda\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $\lambda < 0$, określamy wzorem

$$g_\lambda(x) = \begin{cases} e^{\lambda x} & \text{dla } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Splot funkcji μ-prawie okresowych

Definicja

Funkcję $g_\lambda \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $\lambda < 0$, określamy wzorem

$$g_\lambda(x) = \begin{cases} e^{\lambda x} & \text{dla } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Twierdzenie

Jeśli funkcja μ-prawie okresowa f spełnia warunek

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad \forall A \subseteq [u, u+1]$$
$$\mu(A) \leqslant \delta \Longrightarrow \int_A |f(t)| \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon,$$

to splot $f * g_\lambda$ istnieje dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i jest on funkcją prawie okresową w sensie Bohra.

Splot funkcji μ-prawie okresowych

Definicja

Funkcję $g_\lambda\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $\lambda < 0$, określamy wzorem

$$g_\lambda(x) = \begin{cases} e^{\lambda x} & \text{dla } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Splot funkcji μ-prawie okresowych

Definicja

Funkcję $g_\lambda \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $\lambda < 0$, określamy wzorem

$$g_\lambda(x) = \begin{cases} e^{\lambda x} & \text{dla } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Twierdzenie

Niech f będzie nieujemną funkcją μ-prawie okresową. Jeśli splot $f * g_\lambda$ istnieje oraz

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} \int_u^{u+1} f(t) \mathrm{d}t = +\infty,$$

to nie jest on funkcją μ-prawie okresową.

Twierdzenie

Dla każdego $\lambda < 0$ zachodzi

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{e^{\lambda t}}{2 + \cos(t) + \cos(\sqrt{2}t)} = 0.$$

Twierdzenie

Dla każdego $\lambda < 0$ zachodzi

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{\lambda t}}{2+\cos(t)+\cos(\sqrt{2}t)} = 0.$$

Bezpośredni dowód powyższego faktu nie jest trywialny i jest on oparty na subtelnym zastosowaniu aproksymacji diofantycznych oraz następującego kryterium.

Asymptotyka funkcji LAP i μ-prawie okresowych

Twierdzenie

Niech $a \in \mathbb{R}$ oraz niech $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą takie, że:

- funkcja f jest niemalejąca oraz $f(t) \geqslant 0$ na $(a, +\infty)$;
- funkcja g jest ciągła oraz $g(t) > 0$ na $(a, +\infty)$;
- wszystkie punkty w $(a, +\infty)$, w których g osiąga minimum lokalne, tworzą ciąg rosnący $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, rozbieżny do $+\infty$.

Wtedy

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(a_n)}{g(a_{n+1})} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0.$$

Asymptotyka funkcji LAP i μ-prawie okresowych

Twierdzenie

Dla każdego $\lambda < 0$ zachodzi
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{\lambda t}}{2+\cos(t)+\cos(\sqrt{2}t)} = 0.$$

Twierdzenie

Dla każdej funkcji $f\colon \mathbb{R} \to (0,+\infty)$, każdego $a \in \mathbb{R}$ oraz każdego $\varepsilon > 0$ istnieją $b \in \mathbb{R}$ oraz ciąg $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rozbieżny do $+\infty$ i taki, że
$$|a-b| < \varepsilon \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{f(t_n)}{2+\cos(t_n)+\cos(bt_n)} = +\infty.$$

Rozważmy równanie różniczkowe liniowe pierwszego rzędu postaci

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Zastosowania

Rozważmy równanie różniczkowe liniowe pierwszego rzędu postaci

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie

Niech $f \in LAP_b(\mathbb{R})$ oraz niech $\lambda < 0$. Wówczas powyższe równanie posiada ograniczone rozwiązanie LAP dane wzorem

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda(t-s)} f(s) \mathrm{d}s, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{S}$$

Zastosowania

Rozważmy semiliniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t, x(t)), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Zastosowania

Rozważmy semiliniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t, x(t)), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Załóżmy, że ograniczona funkcja $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest taka, że:

- dla każdego $u \in \mathbb{R}$ funkcja $t \mapsto f(t, u)$ jest LAP;
- istnieje $L > 0$ takie, że $|f(t, u) - f(t, w)| \leqslant L|u - w|$ dla wszystkich $t, u, w \in \mathbb{R}$.

Zastosowania

Rozważmy semiliniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t, x(t)), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Załóżmy, że ograniczona funkcja $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest taka, że:

- dla każdego $u \in \mathbb{R}$ funkcja $t \mapsto f(t, u)$ jest LAP;
- istnieje $L > 0$ takie, że $|f(t, u) - f(t, w)| \leqslant L|u - w|$ dla wszystkich $t, u, w \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie

Przy powyższych założeniach, jeśli $\lambda < 0$ oraz $L < |\lambda|$, to semiliniowe równanie różniczkowe posiada jedyne prawie automorficzne rozwiązanie (w sensie Bochnera).

Zastosowania

Rozważmy równanie różniczkowe liniowe pierwszego rzędu postaci

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

gdzie $\lambda < 0$ oraz funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i μ-prawie okresowa.

Zastosowania

Rozważmy równanie różniczkowe liniowe pierwszego rzędu postaci

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

gdzie $\lambda < 0$ oraz funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i μ-prawie okresowa.

Przypomnijmy również, że przez (S) oznaczyliśmy następującą funkcję

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda(t-s)} f(s) \mathrm{d}s, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Zastosowania

Rozważmy równanie różniczkowe liniowe pierwszego rzędu postaci

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

gdzie $\lambda < 0$ oraz funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i μ-prawie okresowa.

Twierdzenie

Przy powyższych założeniach, zachodzi jedna z następujących możliwości:

- funkcja (S) jest μ-prawie okresowym rozwiązaniem powyższego równania;
- funkcja (S) jest rozwiązaniem powyższego równania, ale nie jest μ-prawie okresowa;
- funkcja (S) nie jest rozwiązaniem powyższego równania.

Literatura

1. S. Bochner, *Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, I. Teil: Funktionen einer Variablen*, Math. Ann. **96** (1927), 119–147.
2. D. Bugajewski, X.-X. Gan, P. Kasprzak, *Mappings of higher order and nonlinear equations in some spaces of almost periodic functions*, Nonlinear Anal. Theory, Methods and Applications **75** (2012), 5294–5310.
3. D. Bugajewski, A. Nawrocki, *Some remarks on almost periodic functions in view of the Lebesgue measure with applications to linear differential equations*, submitted.
4. S. Stoiński, *Almost periodic functions in the Lebesgue measure*, Comment. Math. Prace Mat. **34** (1994), 189–198.
5. S. Stoiński, *Funkcje prawie okresowe*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2008.

Dziękuję

za

uwagę