Stabilizacja populacji metodą ALC

Dorota Mozyrska

d.mozyrska@pb.edu.pl

Wydział Informatyki
Politechnika Białostocka
Polska

Między teorią a zastosowaniami
– matematyka w działaniu
Będlewo, 25–30 maja 2015


Między teorią a zastosowaniami
MATEMATYKA W DZIAŁANIU
25-30.05.2015 Będlewo
Organizator
Centrum Zastosowań Matematyki Politechniki Gdańskiej
Komitet Naukowy
Grzegorz Graff, Mirosław Lachowicz, Wacław Marzantowicz, Marian Mrozek, Paweł Strzelecki
konferencja dla pracowników szkół wyższych

Plan prezentacji

Motywacja

- Zastosowania metod matematycznych w opisie procesów biologicznych to najczęściej modelowanie dynamiki populacji.
- Jedną ze szczególnie pożądanych własności dynamiki populacji jest odpowiednio określona, dostosowana do interpretacji w opisie populacji, stabilność układu.
- W ciągu ostatniego dwudziestolecia zaproponowano kilka sposobów stabilizacji dynamiki opisującej populacje biologiczne pojedynczego gatunku jak i metapopualcji.

Motywacja c. d.

- Metody te poddawano weryfikacji stosując różne modele dynamiki populacji modele i różne koncepcje stabilności.
- Należy zwrócić uwagę, iż dynamiki populacji są zależne od historii życia gatunku, rozwoju pokoleń ale także od wpływu innych czynników. Ponadto można rozważać różne rodzaje stabilności wielkości populacji.
- W celu utrzymania poziomu populacji stosuje się również odpowiednie metody sterowania poziomem populacji

Wybrane prace

- Franco, D., Perán, J.:
  Stabilization of population dynamics via threshold harvesting strategies.
  Ecological Complexity 14, 2013, pp. 85-–94.
- Sah, P., Salve, J.P., Dey, S.:
  Stabilizing biological populations and metapopulations through adaptive limiter control.
  Journal of Theoretical Biology 320, 2013, pp. 113-–123.
- Daniel Franco, Frank M. Hilker:
  Adaptive limiter control of unimodal population maps.
  Journal of Theoretical Biology 337, 2013, pp. 161—173
- Corron, N.J., Pethel, S.D., Hopper,B.A.:

- Analiza problemu stabilizacji populacji biologicznej opisanej przez dynamikę nieliniowych układów jest jednym z podstawowych pytań dotyczącym kilku dyscyplin, w tym ekologii i biologii.
- Jedną z ważnych kwestii jest sposób na zmniejszenie fluktuacji (zakresu wahań) w wielkości populacji.
- Wielu autorów proponuje różne strategie sterowania w stabilizacji populacji, np. [1, 2, 3, 4, 5, 6].

- Analiza problemu stabilizacji populacji biologicznej opisanej przez dynamikę nieliniowych układów jest jednym z podstawowych pytań dotyczącym kilku dyscyplin, w tym ekologii i biologii.
- Jedną z ważnych kwestii jest sposób na zmniejszenie fluktuacji (zakresu wahań) w wielkości populacji.
- Wielu autorów proponuje różne strategie sterowania w stabilizacji populacji, np. [1, 2, 3, 4, 5, 6].

- Analiza problemu stabilizacji populacji biologicznej opisanej przez dynamikę nieliniowych układów jest jednym z podstawowych pytań dotyczącym kilku dyscyplin, w tym ekologii i biologii.
- Jedną z ważnych kwestii jest sposób na zmniejszenie fluktuacji (zakresu wahań) w wielkości populacji.
- Wielu autorów proponuje różne strategie sterowania w stabilizacji populacji, np. [1, 2, 3, 4, 5, 6].

- W pracach [7, 14] zaproponowano adaptacyjne sterowanie, nazywane

  „adaptive limiter control"(ALC)

  jako nowy sposób sterowania rozwojem populacji.
- ALC jest nietypową metodą w porównaniu do innych metod kontroli/sterowania.
- ALC była głównie badana i stosowana empirycznie i numerycznie.

- W pracach [7, 14] zaproponowano adaptacyjne sterowanie, nazywane

  „adaptive limiter control"(ALC)

  jako nowy sposób sterowania rozwojem populacji.
- ALC jest nietypową metodą w porównaniu do innych metod kontroli/sterowania.
- ALC była głównie badana i stosowana empirycznie i numerycznie.

- W pracach [7, 14] zaproponowano adaptacyjne sterowanie, nazywane

  „adaptive limiter control"(ALC)

  jako nowy sposób sterowania rozwojem populacji.
- ALC jest nietypową metodą w porównaniu do innych metod kontroli/sterowania.
- ALC była głównie badana i stosowana empirycznie i numerycznie.

- Autorzy użyli ***równania Rickerta***, [17], aby zbadać asymptotyczne zachowanie ALC.
- Równanie Rickerta określone jest następująco:

$$x_{t+1} = x_t \exp\left(r\left(\left(1 - \frac{x_t}{K}\right)\right)\right),$$

gdzie x_t oznacza wielkość populacji w czasie t, r jest tempem wzrostu, K współczynnikiem pochłaniania.
- W pracy [8] przedstawiono analityczne metody dotyczące zastosowania ALC w dynamice opisującej pojedyńczą populację. Autorzy rozważają klasyczną dynamikę układu dyskretnego danego za pomocą równania

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad x_0 \geqslant 0, t \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

gdzie funkcja f opisuje rozwój populacji i może być np. zgodna z dynamiką Rickerta.

- Autorzy użyli ***równania Rickerta***, [17], aby zbadać asymptotyczne zachowanie ALC.
- Równanie Rickerta określone jest następująco:

$$x_{t+1} = x_t \exp\left(r\left(\left(1 - \frac{x_t}{K}\right)\right)\right),$$

gdzie x_t oznacza wielkość populacji w czasie t, r jest tempem wzrostu, K współczynnikiem pochłaniania.

- W pracy [8] przedstawiono analityczne metody dotyczące zastosowania ALC w dynamice opisującej pojedynczą populację. Autorzy rozważają klasyczną dynamikę układu dyskretnego danego za pomocą równania

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad x_0 \geqslant 0, t \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

gdzie funkcja f opisuje rozwój populacji i może być np. zgodna z dynamiką Rickerta.

- Autorzy użyli ***równania Rickerta***, [17], aby zbadać asymptotyczne zachowanie ALC.
- Równanie Rickerta określone jest następująco:

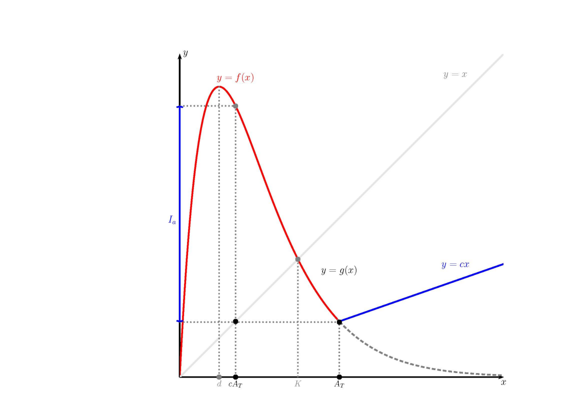
$$x_{t+1} = x_t \exp\left(r\left((1 - \frac{x_t}{K}\right)\right),$$

  gdzie x_t oznacza wielkość populacji w czasie t, r jest tempem wzrostu, K współczynnikiem pochłaniania.
- W pracy [8] przedstawiono analityczne metody dotyczące zastosowania ALC w dynamice opisującej pojedynczą populację. Autorzy rozważają klasyczną dynamikę układu dyskretnego danego za pomocą równania

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad x_0 \geqslant 0, t \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

  gdzie funkcja f opisuje rozwój populacji i może być np. zgodna z dynamiką Rickerta.

Funkcja f opisuje rozwój populacji i może być np. zgodna z dynamiką Rickerta.



Rysunek : ALC zastsowana względem prostej $y = cx$, [8].

O funkcji f zakładamy, że ([9, 10, 11, 12, 6]):

(C1) $f : [0, b] \to [0, b)$ ($b = \infty$ dopuszczalne) jest różniczkowalna w sposób ciągły oraz $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ dla $x \in (0, b)$.

(C2) f ma dwa nieujemne punkty stałe: $x = 0$ i $x = K > 0$, gdzie $f(x) > x$ dla $0 < x < K$, i $f(x) < x$ dla $x > K$.

(C3) f ma dokładnie jedno ekstremum lokalne, dla $x = d$, $d < K$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x \in (0, d)$, $f'(x) < 0$ dla $x > d$ i $f'(0^+), f'(b^-) \in \mathbb{R}$.

Podstawowe założenia metody ALC

- Jeśli wielkość populacji x_t w czasie t spada poniżej pewnego progu, to następuje ingerencja zwiększająca populację z powrotem do tego progu. W tym przypadku ALC jest podobna do metod sterownia zaproponowanych w [13].
- Przy zastosowaniu ALC rozwój wielkości populacji dany jest przez układ:

$$x_{t+1} = max\{f(x_t), cx_t\},$$

gdzie $c \in (0, 1)$ jest intensywnością, współczynnikiem progowym kontroli spadku wielkości populacji w przyjętej metodzie.

Podstawowe założenia metody ALC

- Jeśli wielkość populacji x_t w czasie t spada poniżej pewnego progu, to następuje ingerencja zwiększająca populację z powrotem do tego progu. W tym przypadku ALC jest podobna do metod sterownia zaproponowanych w [13].
- Przy zastosowaniu ALC rozwój wielkości populacji dany jest przez układ:

$$x_{t+1} = max\{f(x_t), cx_t\},$$

gdzie $c \in (0, 1)$ jest intensywnością, współczynnikiem progowym kontroli spadku wielkości populacji w przyjętej metodzie.

Podstawowe założenia metody ALC, cd. ..

- Metoda ALC modyfikuje wielkość populacji jedynie w niektórych pokoleniach, gdy populacjia spada poniżej pewnego ułamka poprzedniej generacji.
- ALC jest aktywowana w tych krokach t, dla których w kroku $t-1$ wilekość populacji wykroczyła poza progowy poziom A_T.
- W przypadku jednej zmiennej, a więc jednej populacji w jednym środowisku punkt progowy geometrycznie jest wyznaczany jako punkt przecięcia wykresu funkcji f i linii prostej $y = cx$.

Podstawowe założenia metody ALC, cd. ..

- Metoda ALC modyfikuje wielkość populacji jedynie w niektórych pokoleniach, gdy populacjia spada poniżej pewnego ułamka poprzedniej generacji.
- ALC jest aktywowana w tych krokach t, dla których w kroku $t-1$ wilekość populacji wykroczyła poza progowy poziom A_T.
- W przypadku jednej zmiennej, a więc jednej populacji w jednym środowisku punkt progowy geometrycznie jest wyznaczany jako punkt przecięcia wykresu funkcji f i linii prostej $y = cx$.

Podstawowe założenia metody ALC, cd. ..

- Metoda ALC modyfikuje wielkość populacji jedynie w niektórych pokoleniach, gdy populacjia spada poniżej pewnego ułamka poprzedniej generacji.
- ALC jest aktywowana w tych krokach t, dla których w kroku $t-1$ wilekość populacji wykroczyła poza progowy poziom A_T.
- W przypadku jednej zmiennej, a więc jednej populacji w jednym środowisku punkt progowy geometrycznie jest wyznaczany jako punkt przecięcia wykresu funkcji f i linii prostej $y = cx$.

Podstawowe założenia metody ALC, cd. ..

- Najważniejszą własnością ALC jest to, że zachowuje ona wielkość populacji w otoczeniu punktu K. Można wyznaczyć rejon tzw.*trapping region*- zakres ograniczenia.
- Taki zakres w przypadku jednowymiarowym jest całkowicie określony przez własności funkcji f w dynamice i wartość współczynnika sterowania c.

Proposition

[8] Załóżmy, że f spełnia warunki (C1)-(C3) hold. Dodatkowo niech dla ustalonego $c \in (0,1)$ istnieje progowy poziom A_T, taki że $d \leqslant cA_T$, gdzie d jest wielkością populacji generowaną w maksimum lokalny, (C3). Wtedy po stosując metodę ALC ze współczynnikiem intensywności c, wielkość populacji x_t pozostaje w przedziale zawierającym punkt stały K: $I_a := [cA_T, f(cA_T)]$ dla dowolnej wartości początkowej $x_0 \in (0, b)$.

- Idea dowodu: rozpatrzenie poszczególnych przypadków, gdzie znajduje się początkowa wartość x_0.

uwagi

- Dodatkowow wykazano, że metoda ALC pomaga zachować stały stan populacji w warunkach laboratoryjncyh dla populacji i metapopulacji:

Rysunek : Drosophila melanogester (muszka owocowa)

- W pracy [14] autorzy pokazują, że ALC może stabilizwać stan populacji nawet gdy jest stosowana dla zakresu ok. 10% populacji.
- Numeryczne eksperymenty pokazują również odporność strukturalną dynamiki układu.

Jedna populacja, dwa środowiska

- Badania prowadzą:
  Dorota Mozyrska, Ewa Girejko, Daniel Franco.
- Dynamika jednej populacji w dwóch środowiskach, opisana równaniami:

$$\begin{aligned} a_{t+1} &= f_1(a_t, b_t) = (1-\alpha)f(a_t) + \alpha f(b_t) \\ b_{t+1} &= f_2(a_t, b_t) = \alpha f(a_t) + (1-\alpha)f(b_t)\,, \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie a_t, b_t są wielkościami populacji w czasie t w środowiskach A, B, $\alpha \in [0,1]$ i funkcja f jest funkcją jednej zmiennej spełniającą warunki (C1)-(C3).

- Planowane jest zastosowanie metody ALC do stabilizacji wielkości populacji, w przypadku rozważenia jednej populacji z możliwością migracji między dwoma środowiskami oraz zastosowaniem ALC tylko w jednym ze środowisk:

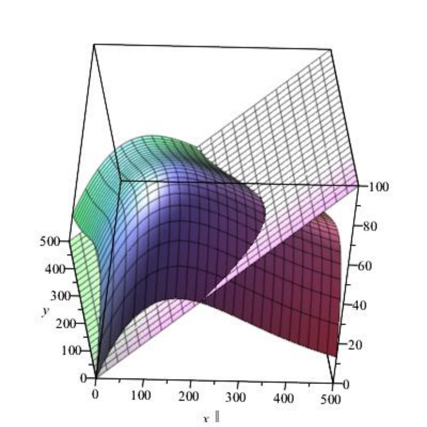
$$\begin{aligned} a_{t+1} &= max\{f_1(a_t, b_t), ca_t\} \\ b_{t+1} &= f_2(a_t, b_t) = \alpha f(a_t) + (1-\alpha) f(b_t)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

- Dla modelu danego przez układ (2) wprowadzamy metodę ALC do pierwszego równania i poszukiwać będziemy obszaru zachowującego rozmiar populacji z ośrodka A.

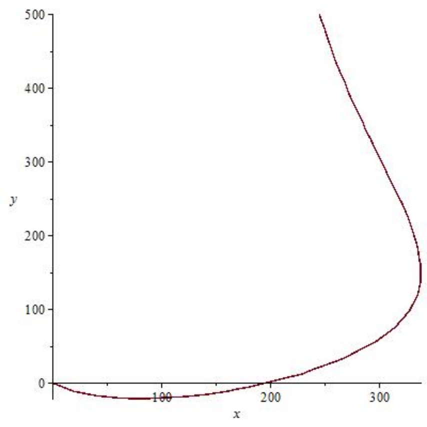
W trakcie dowodu

Twierdzenie

Niech obszar niezmienniczości rozmiaru populacji a_t będzie określony jako obszar normalny na płaszczyźnie (a_t, b_t). Wprowadzając sterowanie ALC na pierwszą współrzędną określamy punkty progowe jako punkty odpowiadające krzywej: $\Gamma_T := \{(x, y) : f_1(x, y) = cx, x \geqslant 0, y \geqslant 0\} = \{(x, y) : x = A_T(y)\}$. Krzywa Γ_T jest częścią wspólną powierzchni $z = f_1(x, y)$ z płaszczyzną $z = cx$. Wtedy zastosowanie ALC ze współczynnikiem c zachowuje wielkość populacji (a_t, b_t) w obszarze: $\Omega_a := \{(x, y) : cA_T(y) \leqslant x \leqslant f_1(cA_T(y), d), y \in [0, M]\}$ dla dowolnego punktu początkowego $(a_0, b_0) \in (0, b) \times (0, b)$.



Rysunek : Krzywa $(\Gamma_T, f_1(\Gamma_T))$.



Rysunek : Rzut krzywej Γ_T na płaszczyznę (x, y).

Plan pracy na przyszłość

- Planujemy również zastosowanie metody ALC do stabilizacji wielkości populacji w dwóch środowiskach/ośrodkach, zastosowanie ALC w obu ośrodkach z tymi samymi lub różnymi współczynnikami c_1, c_2:

$$\begin{aligned} a_{t+1} &= max\{f_1(a_t, b_t), c_1 a_t\} \\ b_{t+1} &= f_2(a_t, b_t) = max\{f_2(a_t, b_t), c_2 b_t\}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

- Metoda ALC zosatnie zastosowana również do stabilizacji jednej populacji ale z różną strukturą wiekową: larwy, poczwarki, dorosłe osobniki, poprzez zastosowanie modelu układu dynamicznego z opóźnieniem.

McCallum, H.:
Effects of immigration on chaotic population dynamics.
Journal of Theoretical Biology 154, 1992, pp. 277-–284.

Solé, R.V., Gamarra, J.G., Ginovart, M., López,D.:
Controlling chaos in ecology: from deterministic to individual-based models.
Bulletin of Mathematical Biology 61, 1999, pp. 1187-–1207.

Stone, L., Hart, D.:
Effects of immigration on the dynamics of simple population models.
Theoretical Population Biology 55, 1999, pp. 227-–234.

Hilker, F.M., Westerhoff, F.H.:
Paradox of simple limiter control.
Physical Review E73, 2006, 052901.

Carmona, P., Franco, D.:
Control of chaotic behaviour and prevention of extinction using constant proportional feedback.
Nonlinear Analysis: Real World Applications 12, 2011, pp. 3719—3726.

Franco, D., Perán, J.:
Stabilization of population dynamics via threshold harvesting strategies.
Ecological Complexity 14, 2013, pp. 85-–94.

Sah, P., Salve, J.P., Dey, S.:
Stabilizing biological populations and metapopulations through adaptive limiter control.
Journal of Theoretical Biology 320, 2013, pp. 113-–123.

Daniel Franco, Frank M. Hilker:

Adaptive limiter control of unimodal population maps.
Journal of Theoretical Biology 337, 2013, pp. 161—173

May, R.M.:
Simple mathematical models with very complicated dynamics.
Nature 261, 1976, pp. 459-–467.

Singer, D.:
Stable orbits and bifurcation of maps of the interval.
SIAM Journal on Applied Mathematics 35, 1978, pp. 260—267.

Cull, P.:
Global stability of population models.
Bulletin of Mathematical Biology 43, 1981, pp. 47-–58.

Schreiber, S.:

Chaos and population disappearances in simple ecological models.
Journal of Mathematical Biology 42, 2001, pp. 239–260.

Corron, N.J., Pethel, S.D., Hopper,B.A.:
Controlling chaos with simple limiters.
Physical Review Letters 84, 2000, pp. 3835-–3838.

Sah, P., Dey, S.:
Stabilizing Spatially-Structured Populations through Adaptive Limiter Control.
PLoS ONE 9(8): ,2014, e105861. doi:10.1371/journal.pone.0105861

Grimm V., Wissel C.:
Babel, or the ecological stability discussions: an inventory and analysis of terminology and a guide for avoiding confusion.

Oecologia 109, 1997, pp. 323-–334.

Schöll E., Schuster H.G.:
Handbook of chaos control.
Weinheim: Wiley-Vch Verlag GmbH & Co. KGaA, 2008.

Ricker W.E:
Stock and recruitment.
Journal of the Fisheries Research Board of Canada 11: 559–623. doi: 10.1139/f54-039, 1954.