Fale biegnące w równaniach reakcji-dyfuzji

Piotr Bartłomiejczyk

Politechnika Gdańska

Między teorią a zastosowaniami: Matematyka w działaniu
Będlewo, 25–30 maja 2015

Równanie reakcji-dyfuzji

Równanie reakcji-dyfuzji

Rozważmy skalarne równanie reakcji-dyfuzji

Równanie reakcji-dyfuzji

Rozważmy skalarne równanie reakcji-dyfuzji

$$u_t - u_{xx} = f(u) \qquad \text{w } \mathbb{R} \times (0, \infty), \tag{1}$$

Równanie reakcji-dyfuzji

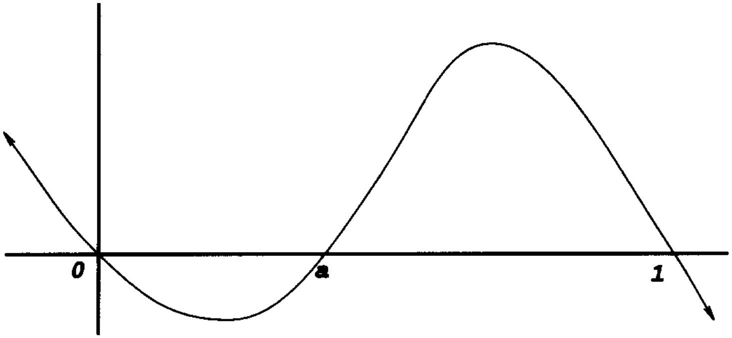
Rozważmy skalarne równanie reakcji-dyfuzji

$$(1) \qquad u_t - u_{xx} = f(u) \qquad \text{w } \mathbb{R} \times (0, \infty),$$

gdzie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ przypomina wielomian trzeciego stopnia.

Wykres funkcji f

Wykres funkcji f



Graph of the function f

Równanie bistabilne

Równanie bistabilne

Stałe 0 i 1 są stabilnymi rozwiązaniami równania (1) ($f' < 0$ w punktach $z = 0, 1$),

Równanie bistabilne

Stałe 0 i 1 są stabilnymi rozwiązaniami równania (1) ($f' < 0$ w punktach $z = 0, 1$), natomiast stała a jest rozwiązaniem niestabilnym ($f' > 0$ w punkcie $z = a$).

Równanie bistabilne

Stałe 0 i 1 są stabilnymi rozwiązaniami równania (1) ($f' < 0$ w punktach $z = 0, 1$), natomiast stała a jest rozwiązaniem niestabilnym ($f' > 0$ w punkcie $z = a$).

Stąd równanie (1) nazywamy *bistabilnym*.

Bistabilne fale biegnące

Bistabilne fale biegnące

Szukamy bistabilnych *fal biegnących* tzn. rozwiązań u równania (1) postaci

Bistabilne fale biegnące

Szukamy bistabilnych *fal biegnących* tzn. rozwiązań u równania (1) postaci

$$u(x,t) = v(x - \sigma t),$$

Bistabilne fale biegnące

Szukamy bistabilnych *fal biegnących* tzn. rozwiązań u równania (1) postaci

$$u(x,t) = v(x - \sigma t),$$

przy czym profil v i prędkość σ należy wyznaczyć w taki sposób, aby

Bistabilne fale biegnące

Szukamy bistabilnych *fal biegnących* tzn. rozwiązań u równania (1) postaci

$$u(x,t) = v(x - \sigma t),$$

przy czym profil v i prędkość σ należy wyznaczyć w taki sposób, aby

$$u \to 0 \quad \text{dla } x \to -\infty, \qquad u \to 1 \quad \text{dla } x \to +\infty.$$

Bistabilne fale biegnące

Szukamy bistabilnych *fal biegnących* tzn. rozwiązań u równania (1) postaci

$$u(x,t) = v(x - \sigma t),$$

przy czym profil v i prędkość σ należy wyznaczyć w taki sposób, aby

$$u \to 0 \quad \text{dla } x \to -\infty, \qquad u \to 1 \quad \text{dla } x \to +\infty.$$

Chcemy zatem, by fala biegnąca umożliwiała przejście między dwoma stanami stabilnymi $z = 0, 1$ przyjmowanymi dla $x = \pm\infty$.

Równanie różniczkowe II rzędu

Równanie różniczkowe II rzędu

Podstawiając $s = x - \sigma t$ widzimy, że funkcja v musi spełniać jedno równanie zwyczajne II rzędu

Równanie różniczkowe II rzędu

Podstawiając $s = x - \sigma t$ widzimy, że funkcja v musi spełniać jedno równanie zwyczajne II rzędu

$$v'' + \sigma v' + f(v) = 0 \qquad \left(' = \frac{d}{ds}\right)$$

Równanie różniczkowe II rzędu

Podstawiając $s = x - \sigma t$ widzimy, że funkcja v musi spełniać jedno równanie zwyczajne II rzędu

$$v'' + \sigma v' + f(v) = 0 \qquad \left(' = \frac{d}{ds}\right)$$

i warunki

Równanie różniczkowe II rzędu

Podstawiając $s = x - \sigma t$ widzimy, że funkcja v musi spełniać jedno równanie zwyczajne II rzędu

$$v'' + \sigma v' + f(v) = 0 \qquad \left(' = \frac{d}{ds} \right)$$

i warunki

$$\lim_{s \to +\infty} v(s) = 1, \quad \lim_{s \to -\infty} v(s) = 0, \quad \lim_{s \to \pm\infty} v'(s) = 0.$$

Układ dwóch równań I rzędu

Układ dwóch równań I rzędu

Lub równoważnie układ dwóch równań autonomicznych I rzędu

Układ dwóch równań I rzędu

Lub równoważnie układ dwóch równań autonomicznych I rzędu

$$\begin{aligned} v' &= w \\ w' &= -\sigma w - f(v), \end{aligned} \tag{2}$$

Układ dwóch równań I rzędu

Lub równoważnie układ dwóch równań autonomicznych I rzędu

$$\begin{aligned} v' &= w \\ w' &= -\sigma w - f(v), \end{aligned} \tag{2}$$

z warunkami

Układ dwóch równań I rzędu

Lub równoważnie układ dwóch równań autonomicznych I rzędu

$$\begin{aligned} v' &= w \\ w' &= -\sigma w - f(v), \end{aligned} \tag{2}$$

z warunkami

$$\lim_{s\to+\infty}(v,w) = (1,0), \quad \lim_{s\to-\infty}(v,w) = (0,0).$$

Punkty stacjonarne potoku

Punkty stacjonarne potoku

Łatwo sprawdzić, że

Punkty stacjonarne potoku

Łatwo sprawdzić, że

- $(0, 0)$ i $(1, 0)$ są siodłowymi punktami stacjonarnymi potoku generowanego przez (2),

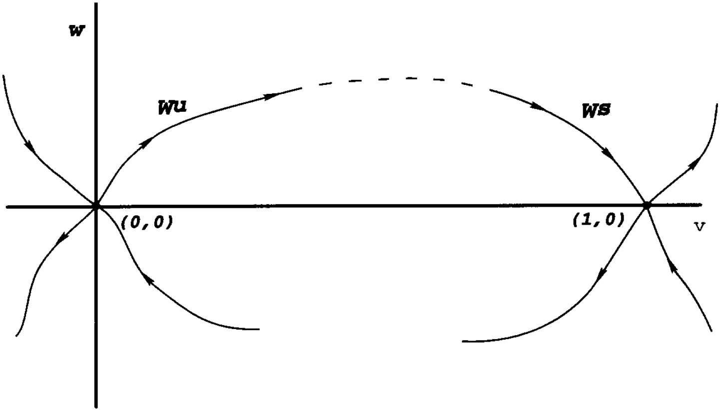
Punkty stacjonarne potoku

Łatwo sprawdzić, że

- $(0,0)$ i $(1,0)$ są siodłowymi punktami stacjonarnymi potoku generowanego przez (2),
- portrety fazowe wokół tych punktów wyglądają jak na rysunku.

Portret fazowy

Portret fazowy



Stable and unstable curves

Kluczowa obserwacja

Kluczowa obserwacja

Fakt

Istnienie orbity heteroklinicznej układu (2) *z punktu* $(0,0)$ *do punktu* $(1,0)$ *implikuje istnienie bistabilnej fali biegnącej o prędkości* σ *dla równania reakcji-dyfuzji* (1).

Przykład Conleya

Przykład Conleya

W książce Charlesa Conleya *Isolated Invariant Sets and the Morse index* (CBMS Reg. Conf. Ser. in Math. 38, AMS, 1978) znajduje się następujący przykład. Rozważmy układ równań

Przykład Conleya

W książce Charlesa Conleya *Isolated Invariant Sets and the Morse index* (CBMS Reg. Conf. Ser. in Math. 38, AMS, 1978) znajduje się następujący przykład. Rozważmy układ równań

$$\begin{aligned} dx/dt &= y, \\ dy/dt &= \theta y - x(x-1/3)(1-x). \end{aligned}$$

Przykład Conleya

W książce Charlesa Conleya *Isolated Invariant Sets and the Morse index* (CBMS Reg. Conf. Ser. in Math. 38, AMS, 1978) znajduje się następujący przykład. Rozważmy układ równań

$$
\begin{aligned}
dx/dt &= y, \\
dy/dt &= \theta y - x(x - 1/3)(1 - x).
\end{aligned}
$$

Twierdzenie

Dla pewnego θ *istnieje orbita heterokliniczna z* $(0, 0)$ *do* $(1, 0)$.

Potok

Potok

Niech X oznacza lokalnie zwartą przestrzeń metryczną oraz φ oznacza potok na X,

Potok

Niech X oznacza lokalnie zwartą przestrzeń metryczną oraz φ oznacza potok na X, tzn. ciągłe odwzorowanie $\varphi\colon \mathbb{R}\times X\to X$ takie, że

Potok

Niech X oznacza lokalnie zwartą przestrzeń metryczną oraz φ oznacza potok na X, tzn. ciągłe odwzorowanie $\varphi\colon \mathbb{R} \times X \to X$ takie, że

- $\varphi(0, x) = x$,

Potok

Niech X oznacza lokalnie zwartą przestrzeń metryczną oraz φ oznacza potok na X, tzn. ciągłe odwzorowanie $\varphi\colon \mathbb{R} \times X \to X$ takie, że

- $\varphi(0, x) = x$,
- $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t + s, x)$.

Potok

Niech X oznacza lokalnie zwartą przestrzeń metryczną oraz φ oznacza potok na X, tzn. ciągłe odwzorowanie $\varphi\colon \mathbb{R}\times X \to X$ takie, że

- $\varphi(0,x) = x$,
- $\varphi(t,\varphi(s,x)) = \varphi(t+s,x)$.

Oznaczenia

- Jeśli $I \subset \mathbb{R}$ i $A \subset X$, to $\varphi(I,A) := \{\varphi(t,x) \mid t \in I \text{ and } x \in A\}$.

Potok

Niech X oznacza lokalnie zwartą przestrzeń metryczną oraz φ oznacza potok na X, tzn. ciągłe odwzorowanie $\varphi\colon \mathbb{R} \times X \to X$ takie, że

- $\varphi(0,x) = x$,
- $\varphi(t,\varphi(s,x)) = \varphi(t+s,x)$.

Oznaczenia

- Jeśli $I \subset \mathbb{R}$ i $A \subset X$, to $\varphi(I,A) := \{\varphi(t,x) \,|\, t \in I \text{ and } x \in A\}$.
- Dla $N \subset X$ zbiór $\mathrm{Inv}(N) := \{x \in X \,|\, \varphi(\mathbb{R},x) \subset N\}$ nazywamy *częścią niezmienniczą* zbioru N.

Potok

Niech X oznacza lokalnie zwartą przestrzeń metryczną oraz φ oznacza potok na X, tzn. ciągłe odwzorowanie $\varphi\colon \mathbb{R} \times X \to X$ takie, że

- $\varphi(0, x) = x$,
- $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t + s, x)$.

Oznaczenia

- Jeśli $I \subset \mathbb{R}$ i $A \subset X$, to $\varphi(I, A) := \{\varphi(t, x) \mid t \in I \text{ and } x \in A\}$.
- Dla $N \subset X$ zbiór $\operatorname{Inv}(N) := \{x \in X \mid \varphi(\mathbb{R}, x) \subset N\}$ nazywamy *częścią niezmienniczą* zbioru N.
- Mówimy, że $S \subset X$ jest *niezmienniczy*, jeśli $\operatorname{Inv}(S) = S$.

Zbiory niezmiennicze

Zbiory niezmiennicze

Niech $S \subset X$ będzie zwartym zbiorem niezmienniczym.

Zbiory niezmiennicze

Niech $S \subset X$ będzie zwartym zbiorem niezmienniczym.

- Zwarty zbiór $N \subset X$ nazywamy *otoczeniem izolującym*, jeśli $\mathrm{Inv}(N) \subset \mathrm{int}(N)$.

Zbiory niezmiennicze

Niech $S \subset X$ będzie zwartym zbiorem niezmienniczym.

- Zwarty zbiór $N \subset X$ nazywamy *otoczeniem izolującym*, jeśli $\mathrm{Inv}(N) \subset \mathrm{int}(N)$.
- S nazywamy *izolowanym zwartym zbiorem niezmienniczym*, jeśli $S = \mathrm{Inv}(N)$ dla pewnego otoczenia izolującego N.

Zbiory niezmiennicze

Niech $S \subset X$ będzie zwartym zbiorem niezmienniczym.

- Zwarty zbiór $N \subset X$ nazywamy *otoczeniem izolującym*, jeśli $\mathrm{Inv}(N) \subset \mathrm{int}(N)$.
- S nazywamy *izolowanym zwartym zbiorem niezmienniczym*, jeśli $S = \mathrm{Inv}(N)$ dla pewnego otoczenia izolującego N.
- Zbiór $A \subset L$ nazywamy *dodatnio niezmienniczym* w L, jeśli warunki $x \in A$ i $\varphi([0,t],x) \subset L$ implikują, że $\varphi([0,t],x) \subset A$.

Zbiory niezmiennicze

Niech $S \subset X$ będzie zwartym zbiorem niezmienniczym.

- Zwarty zbiór $N \subset X$ nazywamy *otoczeniem izolującym*, jeśli $\mathrm{Inv}(N) \subset \mathrm{int}(N)$.
- S nazywamy *izolowanym zwartym zbiorem niezmienniczym*, jeśli $S = \mathrm{Inv}(N)$ dla pewnego otoczenia izolującego N.
- Zbiór $A \subset L$ nazywamy *dodatnio niezmienniczym* w L, jeśli warunki $x \in A$ i $\varphi([0,t],x) \subset L$ implikują, że $\varphi([0,t],x) \subset A$.
- Podzbiór A zbioru L nazywamy *zbiorem wyjścia* dla L, jeśli z tego, że $x \in L$ i $\varphi([0,\infty),x) \not\subset L$, wynika, że istnieje $t \geqslant 0$ takie, że $\varphi([0,t],x) \subset L$ i $\varphi(t,x) \in A$.

Para indeksowa

Para indeksowa

Niech S będzie izolowanym zwartym zbiorem niezmienniczym.

Para indeksowa

Niech S będzie izolowanym zwartym zbiorem niezmienniczym. Parę zbiorów zwartych (N^1, N^0) nazywamy *parą indeksową* dla S jeśli:

Para indeksowa

Niech S będzie izolowanym zwartym zbiorem niezmienniczym. Parę zbiorów zwartych (N^1, N^0) nazywamy *parą indeksową* dla S jeśli:

(i) $S = \mathrm{Inv}(\mathrm{cl}(N^1 \setminus N^0)) \subset \mathrm{int}(N^1 \setminus N^0)$,

Para indeksowa

Niech S będzie izolowanym zwartym zbiorem niezmienniczym. Parę zbiorów zwartych (N^1, N^0) nazywamy *parą indeksową* dla S jeśli:

(i) $S = \mathrm{Inv}(\mathrm{cl}(N^1 \setminus N^0)) \subset \mathrm{int}(N^1 \setminus N^0)$,

(ii) N^0 jest dodatnio niezmienniczy w N^1,

Para indeksowa

Niech S będzie izolowanym zwartym zbiorem niezmienniczym. Parę zbiorów zwartych (N^1, N^0) nazywamy *parą indeksową* dla S jeśli:

(i) $S = \operatorname{Inv}(\operatorname{cl}(N^1 \setminus N^0)) \subset \operatorname{int}(N^1 \setminus N^0)$,

(ii) N^0 jest dodatnio niezmienniczy w N^1,

(iii) N^0 jest zbiorem wyjścia dla N^1.

Indeks Conleya

Indeks Conleya

Definicja

Homologiczny indeks Conleya zbioru S określamy jako

Indeks Conleya

Definicja

Homologiczny indeks Conleya zbioru S określamy jako

$$CH_*(S) := H_*(N^1/N^0, [N^0]) \approx H_*(N^1, N^0),$$

Indeks Conleya

Definicja

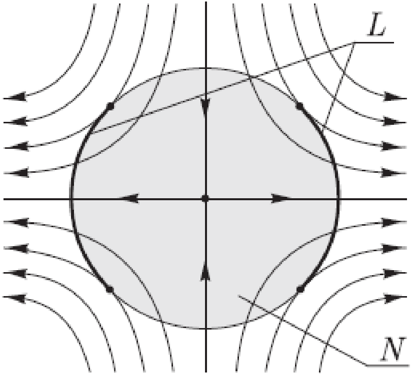
Homologiczny indeks Conleya zbioru S określamy jako

$$CH_*(S) := H_*(N^1/N^0, [N^0]) \approx H_*(N^1, N^0),$$

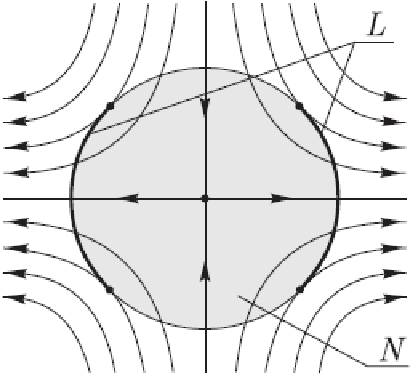
gdzie (N^1, N^0) is jest jakąkolwiek para indeksową dla S.

Indeks Conleya — przykład

Indeks Conleya — przykład



Indeks Conleya — przykład



$$CH_*(S) = H_*(N, L) = H_*(S^1, \mathrm{pt})$$

Zbiory ω-graniczne

Zbiory ω-graniczne

Przypomnijmy, że dla $Y \subset X$ jego zbiory ω-graniczne definiujemy jako

Zbiory ω-graniczne

Przypomnijmy, że dla $Y \subset X$ jego zbiory ω-graniczne definiujemy jako

$$\omega^{+}(Y) := \bigcap_{t>0} \operatorname{cl}(\varphi([t,\infty),Y))$$

Zbiory ω-graniczne

Przypomnijmy, że dla $Y \subset X$ jego zbiory ω-graniczne definiujemy jako

$$\omega^+(Y) := \bigcap_{t>0} \mathrm{cl}(\varphi([t,\infty), Y))$$

oraz

Zbiory ω-graniczne

Przypomnijmy, że dla $Y \subset X$ jego zbiory ω-graniczne definiujemy jako

$$\omega^{+}(Y) := \bigcap_{t>0} \mathrm{cl}(\varphi([t,\infty),Y))$$

oraz

$$\omega^{-}(Y) := \bigcap_{t<0} \mathrm{cl}(\varphi((-\infty,t],Y)).$$

Rozkład Morse'a

Rozkład Morse'a

Niech S będzie izolowanym zwartym zbiorem niezmienniczym.

Rozkład Morse'a

Niech S będzie izolowanym zwartym zbiorem niezmienniczym.

Definicja

Rodzinę $\{M_i\}_1^n$ parami rozłącznych zwartych niezmienniczych podzbiorów zbioru S nazywamy *rozkładem Morse'a*,

Rozkład Morse'a

Niech S będzie izolowanym zwartym zbiorem niezmienniczym.

Definicja

Rodzinę $\{M_i\}_1^n$ parami rozłącznych zwartych niezmienniczych podzbiorów zbioru S nazywamy *rozkładem Morse'a*, jeżeli dla każdego $x \in S \setminus \bigcup_{i=1}^n M_i$ istnieją indeksy $i < j$ takie, że $\omega^+(x) \subset M_i$ and $\omega^-(x) \subset M_j$.

Rozkład Morse'a

Niech S będzie izolowanym zwartym zbiorem niezmienniczym.

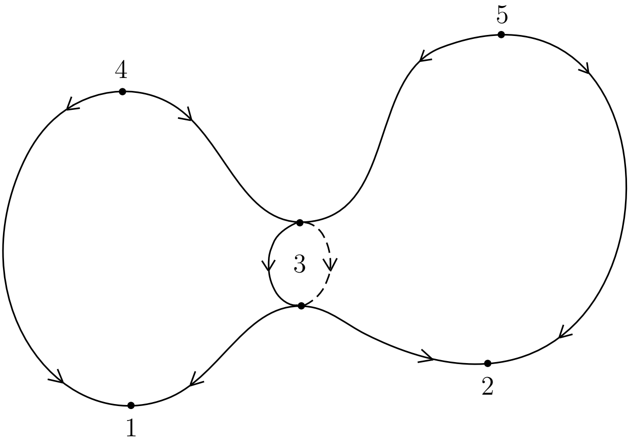
Definicja

Rodzinę $\{M_i\}_1^n$ parami rozłącznych zwartych niezmienniczych podzbiorów zbioru S nazywamy *rozkładem Morse'a*, jeżeli dla każdego $x \in S \setminus \bigcup_{i=1}^n M_i$ istnieją indeksy $i < j$ takie, że $\omega^+(x) \subset M_i$ and $\omega^-(x) \subset M_j$.

Zbiory M_i nazywamy *zbiorami Morse'a*.

Rozkład Morse'a — przykład

Rozkład Morse'a — przykład



Rozkład Morse'a

Rozkład Morse'a

Uwaga

Jak widać *rozkład Morse'a* to taki układ punktów stacjonarnych (ogólniej zwartych zbiorów niezmienniczych), który nie dopuszcza *cykli* czyli skończonych ciągów orbit skierowanych zaczynających i kończących się w tym samym punkcie (zbiorze).

Para atraktor-repeler

Para atraktor-repeler

- Najprostszy nietrywialny rozkład Morse'a izolowanego zwartego zbioru niezmienniczego S składa się z dwóch elementów $\{M_1, M_2\}$.

Para atraktor-repeler

- Najprostszy nietrywialny rozkład Morse'a izolowanego zwartego zbioru niezmienniczego S składa się z dwóch elementów $\{M_1, M_2\}$.
- Nazywamy go *parą atraktor-repeler* w S.

Para atraktor-repeler

- Najprostszy nietrywialny rozkład Morse'a izolowanego zwartego zbioru niezmienniczego S składa się z dwóch elementów $\{M_1, M_2\}$.
- Nazywamy go *parą atraktor-repeler* w S.
- Zbiór *orbit łączących* z M_2 do M_1 w S określamy jako

Para atraktor-repeler

- Najprostszy nietrywialny rozkład Morse'a izolowanego zwartego zbioru niezmienniczego S składa się z dwóch elementów $\{M_1, M_2\}$.
- Nazywamy go *parą atraktor-repeler* w S.
- Zbiór *orbit łączących* z M_2 do M_1 w S określamy jako

$$C(M_2, M_1; S) := \{x \in S \mid \omega^+(x) \subset M_1,\ \omega^-(x) \subset M_2\}.$$

Trójka indeksowa

Trójka indeksowa

Definicja

Trójką indeksową dla pary atraktor-repeler $\{M_1, M_2\}$ w S trójkę zbiorów zwartych $N^0 \subset N^1 \subset N^2$ taką, że

Trójka indeksowa

Definicja

Trójką indeksową dla pary atraktor-repeler $\{M_1, M_2\}$ w S trójkę zbiorów zwartych $N^0 \subset N^1 \subset N^2$ taką, że

- (N^2, N^0) jest parą indeksową dla S,

Trójka indeksowa

Definicja

Trójką indeksową dla pary atraktor-repeler $\{M_1, M_2\}$ w S trójkę zbiorów zwartych $N^0 \subset N^1 \subset N^2$ taką, że

- (N^2, N^0) jest parą indeksową dla S,
- (N^2, N^1) jest parą indeksową dla M_2,

Trójka indeksowa

Definicja

Trójką indeksową dla pary atraktor-repeler $\{M_1, M_2\}$ w S trójkę zbiorów zwartych $N^0 \subset N^1 \subset N^2$ taką, że

- (N^2, N^0) jest parą indeksową dla S,
- (N^2, N^1) jest parą indeksową dla M_2,
- (N^1, N^0) jest parą indeksową dla M_1.

Ciąg dokładny dla pary atraktor-repeler

Ciąg dokładny dla pary atraktor-repeler

Niech ∂ oznacza odwzorowanie brzegu w długim ciągu dokładnym homologii trójki:

Ciąg dokładny dla pary atraktor-repeler

Niech ∂ oznacza odwzorowanie brzegu w długim ciągu dokładnym homologii trójki:

$$\to H_k(N^1, N^0) \to H_k(N^2, N^0) \to H_k(N^2, N^1) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(N^1, N^0) \to$$

Ciąg dokładny dla pary atraktor-repeler

Niech ∂ oznacza odwzorowanie brzegu w długim ciągu dokładnym homologii trójki:

$$\to H_k(N^1, N^0) \to H_k(N^2, N^0) \to H_k(N^2, N^1) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(N^1, N^0) \to$$

Następujące twierdzenie wiąże powyższy ciąg dokładny z dynamiką potoku.

Ciąg dokładny dla pary atraktor-repeler

Niech ∂ oznacza odwzorowanie brzegu w długim ciągu dokładnym homologii trójki:

$$\to H_k(N^1, N^0) \to H_k(N^2, N^0) \to H_k(N^2, N^1) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(N^1, N^0) \to$$

Następujące twierdzenie wiąże powyższy ciąg dokładny z dynamiką potoku.

Twierdzenie

Jeśli $\partial \neq 0$, *to* $C(M_2, M_1; S) \neq \emptyset$.

Własność kontynuacji dla indeksu Conleya

Własność kontynuacji dla indeksu Conleya

Rozważmy ciągłą rodzinę potoków $\varphi_\lambda\colon \mathbb{R} \times X \to X$, gdzie $\lambda \in (a, b)$.

Własność kontynuacji dla indeksu Conleya

Rozważmy ciągłą rodzinę potoków $\varphi_\lambda\colon \mathbb{R} \times X \to X$, gdzie $\lambda \in (a, b)$.

Definicja

Niech $N \subset X$ będzie zwarty. Niech $S_\lambda = \mathrm{Inv}(N, \varphi_\lambda)$.

Własność kontynuacji dla indeksu Conleya

Rozważmy ciągłą rodzinę potoków $\varphi_\lambda \colon \mathbb{R} \times X \to X$, gdzie $\lambda \in (a, b)$.

Definicja

Niech $N \subset X$ będzie zwarty. Niech $S_\lambda = \mathrm{Inv}(N, \varphi_\lambda)$. Mówimy, że dwa izolowane zwarte zbiory niezmiennicze S_{λ_0} i S_{λ_1} są połączone przez *kontynuację*, jeżeli N jest otoczeniem izolującym dla wszystkich φ_λ, gdzie $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$.

Własność kontynuacji dla indeksu Conleya

Rozważmy ciągłą rodzinę potoków $\varphi_\lambda \colon \mathbb{R} \times X \to X$, gdzie $\lambda \in (a, b)$.

Definicja

Niech $N \subset X$ będzie zwarty. Niech $S_\lambda = \mathrm{Inv}(N, \varphi_\lambda)$. Mówimy, że dwa izolowane zwarte zbiory niezmiennicze S_{λ_0} i S_{λ_1} są połączone przez *kontynuację*, jeżeli N jest otoczeniem izolującym dla wszystkich φ_λ, gdzie $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$.

Indeks Conleya jest niezmienniczy ze względu na kontynuację.

Własność kontynuacji dla indeksu Conleya

Rozważmy ciągłą rodzinę potoków $\varphi_\lambda \colon \mathbb{R} \times X \to X$, gdzie $\lambda \in (a, b)$.

Definicja

Niech $N \subset X$ będzie zwarty. Niech $S_\lambda = \mathrm{Inv}(N, \varphi_\lambda)$. Mówimy, że dwa izolowane zwarte zbiory niezmiennicze S_{λ_0} i S_{λ_1} są połączone przez *kontynuację*, jeżeli N jest otoczeniem izolującym dla wszystkich φ_λ, gdzie $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$.

Indeks Conleya jest niezmienniczy ze względu na kontynuację.

Twierdzenie

Jeżeli dwa izolowane zwarte zbiory niezmiennicze S_{λ_0} i S_{λ_1} są połączone przez kontynuację, to $CH_*(S_{\lambda_0}) = CH_*(S_{\lambda_1})$.

Własność kontynuacji dla pary atraktor-repeler

Własność kontynuacji dla pary atraktor-repeler

Uwaga

Własność kontynuacji można też sformułować dla rozkładów Morse'a. W szczególnym przypadku pary atraktor-repeler własność kontynuacji formułujemy używając ciągu dokładnego homotopii lub homologii.

Twierdzenie

Twierdzenie

Przypomnijmy nasze twierdzenie.

Twierdzenie

Przypomnijmy nasze twierdzenie.

Twierdzenie

Dla pewnego θ *istnieje orbita łącząca z* $(0,0)$ *do* $(1,0)$ *potoku fazowego generowanego przez układ równań*

$$
\begin{aligned}
dx/dt &= y,\\
dy/dt &= \theta y - x(x-1/3)(1-x).
\end{aligned}
$$

Szkic dowodu 1

Szkic dowodu 1

Załóżmy, że parametr $\theta \in (0, \infty)$. Przypuśćmy, że dla żadnej wartości parametru $\theta > 0$ nie ma orbity łączącej z punktu $(0, 0)$ do punktu $(1, 0)$.

Szkic dowodu 1

Załóżmy, że parametr $\theta \in (0, \infty)$. Przypuśćmy, że dla żadnej wartości parametru $\theta > 0$ nie ma orbity łączącej z punktu $(0, 0)$ do punktu $(1, 0)$. Wtedy ciąg

Szkic dowodu 1

Załóżmy, że parametr $\theta \in (0, \infty)$. Przypuśćmy, że dla żadnej wartości parametru $\theta > 0$ nie ma orbity łączącej z punktu $(0, 0)$ do punktu $(1, 0)$. Wtedy ciąg

$$M_1 = (0, 0) < M_2 = (1, 0) < M_3 = (1/3, 0)$$

Szkic dowodu 1

Załóżmy, że parametr $\theta \in (0, \infty)$. Przypuśćmy, że dla żadnej wartości parametru $\theta > 0$ nie ma orbity łączącej z punktu $(0, 0)$ do punktu $(1, 0)$. Wtedy ciąg

$$M_1 = (0, 0) < M_2 = (1, 0) < M_3 = (1/3, 0)$$

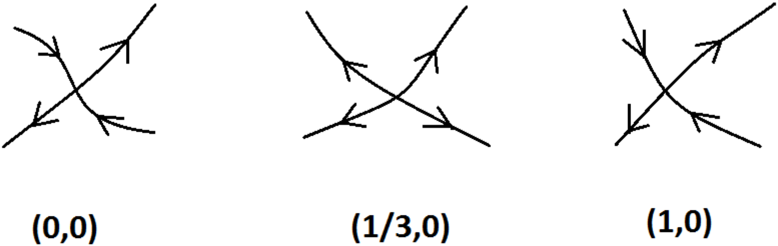
jest rozkładem Morse'a dla dowolnej wartości parametru θ.

Szkic dowodu 1

Załóżmy, że parametr $\theta \in (0, \infty)$. Przypuśćmy, że dla żadnej wartości parametru $\theta > 0$ nie ma orbity łączącej z punktu $(0, 0)$ do punktu $(1, 0)$. Wtedy ciąg

$$M_1 = (0, 0) < M_2 = (1, 0) < M_3 = (1/3, 0)$$

jest rozkładem Morse'a dla dowolnej wartości parametru θ.



Szkic dowodu 2

Szkic dowodu 2

Jeżeli $M_1 = (0,0) < M_2 = (1,0) < M_3 = (1/3,0)$ jest rozkładem Morse'a dla dowolnej wartości parametru θ, to para $\{M_2, M_3\}$ jest parą atraktor-repeler dla wszystkich $\theta > 0$.

Szkic dowodu 3

Szkic dowodu 3

Własności kontynuacji dla pary atraktor-repeler oznacza przemienność poniższego diagramu ciągów dokładnych homologii trójek indeksowych

Szkic dowodu 3

Własności kontynuacji dla pary atraktor-repeler oznacza przemienność poniższego diagramu ciągów dokładnych homologii trójek indeksowych

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & H_k(N^2,N^0) & \longrightarrow & H_k(N^2,N^1) & \xrightarrow{\partial} & H_{k-1}(N^1,N^0) & \longrightarrow \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\longrightarrow & H_k(P^2,P^0) & \longrightarrow & H_k(P^2,P^1) & \xrightarrow{\partial'} & H_{k-1}(P^1,P^0) & \longrightarrow
\end{array}
$$

Szkic dowodu 3

Własności kontynuacji dla pary atraktor-repeler oznacza przemienność poniższego diagramu ciągów dokładnych homologii trójek indeksowych

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H_k(N^2,N^0) \arrow[r] \arrow[d] & H_k(N^2,N^1) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & H_{k-1}(N^1,N^0) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
{} \arrow[r] & H_k(P^2,P^0) \arrow[r] & H_k(P^2,P^1) \arrow[r, "\partial'"] & H_{k-1}(P^1,P^0) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

gdzie

- górny ciąg odpowiada wartości parametru: duże θ,

Szkic dowodu 3

Własności kontynuacji dla pary atraktor-repeler oznacza przemienność poniższego diagramu ciągów dokładnych homologii trójek indeksowych

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H_k(N^2,N^0) \arrow[r] \arrow[d] & H_k(N^2,N^1) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & H_{k-1}(N^1,N^0) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
{} \arrow[r] & H_k(P^2,P^0) \arrow[r] & H_k(P^2,P^1) \arrow[r, "\partial'"] & H_{k-1}(P^1,P^0) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}
$$

gdzie

- górny ciąg odpowiada wartości parametru: duże θ,
- dolny ciąg odpowiada wartości parametru: małe θ,

Szkic dowodu 3

Własności kontynuacji dla pary atraktor-repeler oznacza przemienność poniższego diagramu ciągów dokładnych homologii trójek indeksowych

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & H_k(N^2,N^0) \arrow[r] \arrow[d] & H_k(N^2,N^1) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & H_{k-1}(N^1,N^0) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
\arrow[r] & H_k(P^2,P^0) \arrow[r] & H_k(P^2,P^1) \arrow[r, "\partial'"] & H_{k-1}(P^1,P^0) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

gdzie

- górny ciąg odpowiada wartości parametru: duże θ,
- dolny ciąg odpowiada wartości parametru: małe θ,
- pionowe strzałki są izomorfizmami.

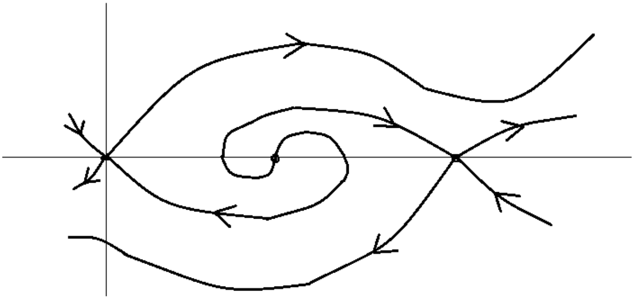
Szkic dowodu 4

Szkic dowodu 4

Wyliczamy odwzorowanie brzegu ∂ dla dużego θ korzystając ze znajomości portretu fazowego.

Szkic dowodu 4

Wyliczamy odwzorowanie brzegu ∂ dla dużego θ korzystając ze znajomości portretu fazowego.



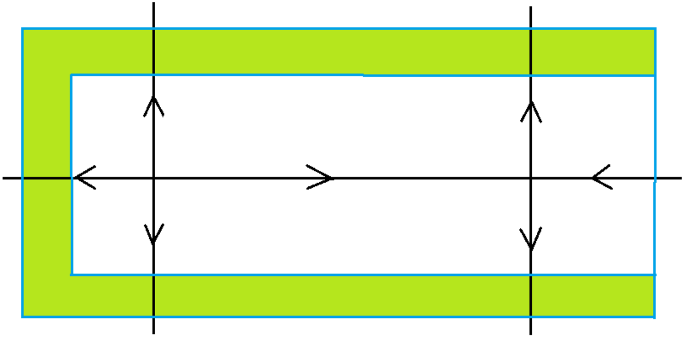
Szkic dowodu 5

Szkic dowodu 5

Po „deformacji” otoczenie izolujące dla pary atraktor-repeler ma postać

Szkic dowodu 5

Po „deformacji” otoczenie izolujące dla pary atraktor-repeler ma postać



Szkic dowodu 6

Szkic dowodu 6

Stąd ciąg dokładny dla pary A-R ma w tym wypadku postać

Szkic dowodu 6

Stąd ciąg dokładny dla pary A-R ma w tym wypadku postać

$$\begin{array}{ccccccc}
H_2(N^2,N^0) & \longrightarrow & H_2(N^2,N^1) & \xrightarrow{\partial} & H_1(N^1,N^0) & \longrightarrow & H_1(N^2,N^0) \\
\| & & \| & & \| & & \| \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\partial} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Szkic dowodu 6

Stąd ciąg dokładny dla pary A-R ma w tym wypadku postać

$$\begin{tikzcd} H_2(N^2,N^0) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_2(N^2,N^1) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, equal] & H_1(N^1,N^0) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_1(N^2,N^0) \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\partial"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

czyli ∂ jest izomorfizmem.

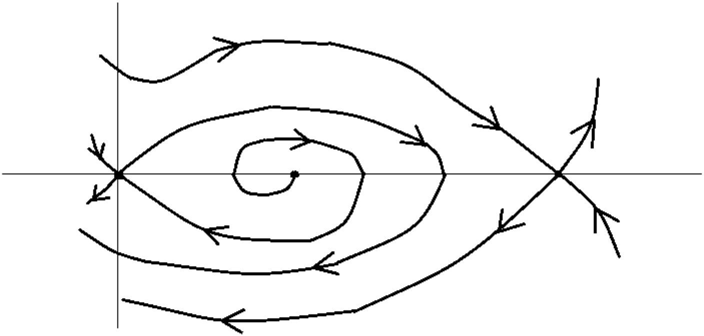
Szkic dowodu 7

Szkic dowodu 7

Wyliczamy odwzorowanie brzegu ∂' dla małego θ wykorzystując znajomość portretu fazowego.

Szkic dowodu 7

Wyliczamy odwzorowanie brzegu ∂' dla małego θ wykorzystując znajomość portretu fazowego.



Szkic dowodu 8

Szkic dowodu 8

Ponieważ dla dużego θ nie orbity łączącej z M_3 do M_2, zatem $\partial' = 0$ na mocy twierdzenia o odwzorowaniu łączącym.

Szkic dowodu 9

Szkic dowodu 9

Otrzymujemy stąd diagram przemienny

Szkic dowodu 9

Otrzymujemy stąd diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} H_*(N^2,N^1) \arrow[r, "\partial", "\text{iso}"'] \arrow[d, "\text{iso}"'] & H_*(N^1,N^0) \arrow[d, "\text{iso}"] \\ H_*(P^2,P^1) \arrow[r, "\partial'", "0"'] & H_*(P^1,P^0) \end{tikzcd}$$

Szkic dowodu 9

Otrzymujemy stąd diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} H_*(N^2, N^1) & \xrightarrow[\text{iso}]{\partial} & H_*(N^1, N^0) \\ {\scriptstyle\text{iso}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\text{iso}} \\ H_*(P^2, P^1) & \xrightarrow[0]{\partial'} & H_*(P^1, P^0) \end{array}$$

co prowadzi do sprzeczności i dowodzi, że dla pewnej dodatniej wartości parametru θ istnieje orbita łącząca z $(0, 0)$ do $(1, 0)$.

Uogólnienie twierdzenia z poprzedniego przykładu

Uogólnienie twierdzenia z poprzedniego przykładu

W książce Conleya znajduje się następujące uogólnienie poprzedniego wyniku.

Uogólnienie twierdzenia z poprzedniego przykładu

W książce Conleya znajduje się następujące uogólnienie poprzedniego wyniku.

Założenia:

Uogólnienie twierdzenia z poprzedniego przykładu

W książce Conleya znajduje się następujące uogólnienie poprzedniego wyniku.

Założenia:

- $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gładka taka, że $F(x) \to -\infty$, gdy $|x| \to \infty$,

Uogólnienie twierdzenia z poprzedniego przykładu

W książce Conleya znajduje się następujące uogólnienie poprzedniego wyniku.

Założenia:

- $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gładka taka, że $F(x) \to -\infty$, gdy $|x| \to \infty$,
- dla pewnego dużego ujemnego C zbiór $\{x \mid F(x) \leqslant C\}$ jest wypukły,

Uogólnienie twierdzenia z poprzedniego przykładu

W książce Conleya znajduje się następujące uogólnienie poprzedniego wyniku.

Założenia:

- $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gładka taka, że $F(x) \to -\infty$, gdy $|x| \to \infty$,
- dla pewnego dużego ujemnego C zbiór $\{x \mid F(x) \leqslant C\}$ jest wypukły,
- $x = 0$ jest globalnym maksimum funkcji F i $F(0) = 0$,

Uogólnienie twierdzenia z poprzedniego przykładu

W książce Conleya znajduje się następujące uogólnienie poprzedniego wyniku.

Założenia:

- $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gładka taka, że $F(x) \to -\infty$, gdy $|x| \to \infty$,
- dla pewnego dużego ujemnego C zbiór $\{x \mid F(x) \leqslant C\}$ jest wypukły,
- $x = 0$ jest globalnym maksimum funkcji F i $F(0) = 0$,
- $x_0 \neq 0$ jest lokalnym maksimum funkcji F,

Uogólnienie twierdzenia z poprzedniego przykładu

W książce Conleya znajduje się następujące uogólnienie poprzedniego wyniku.

Założenia:

- $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gładka taka, że $F(x) \to -\infty$, gdy $|x| \to \infty$,
- dla pewnego dużego ujemnego C zbiór $\{x \mid F(x) \leqslant C\}$ jest wypukły,
- $x = 0$ jest globalnym maksimum funkcji F i $F(0) = 0$,
- $x_0 \neq 0$ jest lokalnym maksimum funkcji F,
- punkty krytyczne funkcji F inne niż 0 i x_0 mają wartości krytyczne mniejsze niż $F(x_0) - \epsilon$ dla pewnego $\epsilon > 0$,

Uogólnienie twierdzenia z poprzedniego przykładu

W książce Conleya znajduje się następujące uogólnienie poprzedniego wyniku.

Założenia:

- $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gładka taka, że $F(x) \to -\infty$, gdy $|x| \to \infty$,
- dla pewnego dużego ujemnego C zbiór $\{x \mid F(x) \leqslant C\}$ jest wypukły,
- $x = 0$ jest globalnym maksimum funkcji F i $F(0) = 0$,
- $x_0 \neq 0$ jest lokalnym maksimum funkcji F,
- punkty krytyczne funkcji F inne niż 0 i x_0 mają wartości krytyczne mniejsze niż $F(x_0) - \epsilon$ dla pewnego $\epsilon > 0$,
- $2F(x) + \langle x, \nabla F(x)\rangle < 0$ dla $x \neq 0$.

Uogólnienie twierdzenia z poprzedniego przykładu c.d.

Uogólnienie twierdzenia z poprzedniego przykładu c.d.

Twierdzenie

Istnieje dodatnia wartość θ *taka, że układ w* $\mathbb{R}^{2n}$

Uogólnienie twierdzenia z poprzedniego przykładu c.d.

Twierdzenie

Istnieje dodatnia wartość θ *taka, że układ w* $\mathbb{R}^{2n}$

$$
\begin{aligned}
dx/dt &= y, \\
dy/dt &= \theta y - \nabla F(x)
\end{aligned}
$$

Uogólnienie twierdzenia z poprzedniego przykładu c.d.

Twierdzenie

Istnieje dodatnia wartość θ *taka, że układ w* $\mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{aligned} dx/dt &= y, \\ dy/dt &= \theta y - \nabla F(x) \end{aligned}$$

posiada rozwiązanie z punktu stałego $(x_0, 0)$ *do punktu stałego* $(0, 0)$.

Uogólnienie twierdzenia z poprzedniego przykładu c.d.

Twierdzenie

Istnieje dodatnia wartość θ *taka, że układ w* $\mathbb{R}^{2n}$

$$
\begin{aligned}
dx/dt &= y, \\
dy/dt &= \theta y - \nabla F(x)
\end{aligned}
$$

posiada rozwiązanie z punktu stałego $(x_0, 0)$ *do punktu stałego* $(0, 0)$.

Uwaga

Z powyższych twierdzeń **nie** wynika jednoznaczność parametru θ.

Pełny dowód

Pełny dowód

Pełny dowód twierdzenia z książki Conleya wykorzystujący teorię macierzy połączeń można znaleźć w pracy

Pełny dowód

Pełny dowód twierdzenia z książki Conleya wykorzystujący teorię macierzy połączeń można znaleźć w pracy

J. Reineck, *Travelling wave solutions to a gradient systems*, Trans. Amer. Math. Soc. 307 (1988), 535–544,

Pełny dowód

Pełny dowód twierdzenia z książki Conleya wykorzystujący teorię macierzy połączeń można znaleźć w pracy

J. Reineck, *Travelling wave solutions to a gradient systems*, Trans. Amer. Math. Soc. 307 (1988), 535–544,

w której puntem wyjścia jest układ równań reakcji-dyfuzji

Pełny dowód

Pełny dowód twierdzenia z książki Conleya wykorzystujący teorię macierzy połączeń można znaleźć w pracy

J. Reineck, *Travelling wave solutions to a gradient systems*, Trans. Amer. Math. Soc. 307 (1988), 535–544,

w której puntem wyjścia jest układ równań reakcji-dyfuzji

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi^2} + f_i(u_1, \dots, u_d), \qquad i = 1, \dots, d.$$

Polecane wprowadzenie do fal biegnących

Polecane wprowadzenie do fal biegnących

Bogdan Kaźmierczak, *Fale biegnące w ośrodkach z dyfuzją*, Matematyka Stosowana 6 (2005), 29–47.