

Przybliżenie cienkich powłok

Łukasz Płociniczak

Institut Matematyki i Informatyki, Politechnika Wroclawska

Warsztaty Matematyka Przemysłowa
Gdańsk, 16–18.10.2014

Wstęp

- Mówić będziemy o bardzo użytecznej technice badania rozwiązań równań różniczkowych.
- Wzięła swój początek w mechanice płynów - w pracach O.Reynoldsa o smarowaniu łożysk (*lubrication theory*).
- Przybliżenie cienkich powłok jest użyteczne wtedy, kiedy geometria układu jest „długa i cienka”.
- Niech L będzie „długim” wymiarem a H „cienkim wymiarem”. Interesować nas będzie sytuacja, kiedy

$$\epsilon := \frac{H}{L} \ll 1.$$

- Przykłady: smarowanie łożysk (szczeliny są wąskie w stosunku do długości), cienkie tafle szkła, temperatura w wąskim pręcie (o zmiennym przekroju), ruch płyt tektonicznych, film łzowy na rogówce oka, ...

Rozgrzewka: przewodnictwo ciepła w wąskim pręcie

- Zanim przystąpimy do właściwego zastosowania przybliżenia cienkich powłok zajmijmy się zagadnieniem przewodnictwa ciepłego w pręcie.
- Zakładamy, że pręt ma zmienny przekrój: jednak jest dużo dłuższy w stosunku do swojej grubości.
- Rozważmy stan stacjonarny: równanie Laplace'a.
- Wprowadźmy L - długość pręta, H - jego typową grubość, $u = u(x, y)$ - temperatura w punkcie (x, y) oraz $g(x) = Hh(x)$ - grubość pręta w punkcie x (wypisaliśmy explicite standardową grubość, zatem $h = O(1)$).
- Przyjmijmy, że początek pręta ma temperaturę T a jego koniec jest wychłodzony do 0. Ponadto brzegi są nieprzepuszczalne (izolowane).

Rozgrzewka: przewodnictwo ciepła w wąskim pręcie

- Zagadnienie wygląda następująco

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad -g(x) < y < g(x),$$

z warunkami

$$u(0, y) = T, \quad u(L, y) = 0 \quad (\text{zadana temperatura}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = 0 \quad \text{na} \quad y = \pm g(x) \quad (\text{izolowany brzeg}),$$

tutaj \bar{n} jest wektorem normalnym skierowanym na zewnątrz krzywej $g = g(x)$.

- Ponieważ $\bar{n} = (-g'(x), \pm 1)/\sqrt{1 + g'(x)^2}$ to warunek o izolowanym brzegu możemy zapisać w postaci

$$0 = \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = \nabla u \cdot \bar{n} = -g'(x) \frac{\partial u}{\partial x} \pm \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \text{na} \quad y = \pm g(x).$$

Rozgrzewka: przewodnictwo ciepła w wąskim pręcie

- To zagadnienie moglibyśmy rozwiązać w postaci zwartej (przekształcenia konforemne). Jednak otrzymalibyśmy skomplikowany wynik, w którym ciężko by było znaleźć istotne informacje fizyczne.
- Oczywiście moglibyśmy również napisać schemat numeryczny, który podałyby nam rozwiązanie. Jednak nie byłby on uniwersalny dla różnych geometrii.
- Zastosujemy techniki asymptotyczne i perturbacyjne.
- Zanim otrzymamy formalnie poprawny wynik, użyjmy swojej intuicji.
 - Pręt jest cienki i długi, więc możemy się spodziewać, że w zasadzie temperatura będzie zmieniać się w kierunku poziomym (czyli x -owym), zatem

$$u(x, u) \approx u_0(x).$$

- Zachowanie ciepła daje nam

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{q} = 0,$$

gdzie \bar{q} jest strumieniem ciepła.

Rozgrzewka: przewodnictwo ciepła w wąskim pręcie

- W naszym przypadku stanu ustalonego $\partial u / \partial t = 0$.
- Ciepło rozchodzi się w zasadzie w jednym kierunku ($q_2 \approx 0$), więc

$$q_1 = \int_{-g(x)}^{g(x)} -k \frac{\partial u}{\partial x} dy \approx \int_{-g(x)}^{g(x)} -k \frac{du_0}{dx} dy = -2kg(x) \frac{du_0}{dx},$$

gdzie indeksy dolne oznaczają kolejne składowe wektora, a k jest stałą przewodności cieplną (użyliśmy prawa Fouriera).

- Ostatecznie, z zachowania energii, otrzymujemy

$$\frac{d}{dx} \left(g(x) \frac{du_0}{dx} \right) = 0.$$

- Otrzymaliśmy równanie różniczkowe łączące kształt pręta z temperaturą.
- Wynik jest prosty i ukazujący zjawiska fizyczne w klarowny sposób.
- Wada: nie znamy rzędu popełnianego błędu (a szacowaliśmy kilka razy).

Rozgrzewka: przewodnictwo ciepła w wąskim pręcie

- Zadanie rozwiążemy ponownie: tym razem systematycznie.
- Najpierw przeskalujmy nasze zmienne

$$x = Lx^*, \quad y = Hy^*, \quad u = Tu^*,$$

gdzie jako skale wybraliśmy typowe rzędy wielkości.

- Wprowadźmy charakterystyczny (mały) parametr $\epsilon := \frac{H}{L}$.
- Proste obliczenia sprowadzają nas do następującego równania (już bezwymiarowego)

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

gdzie dla przejrzystości zapisu usunęliśmy gwiazdki.

- Warunki brzegowe mają teraz postać

$$u(0, y) = 1, \quad u(1, y) = 0 \quad (\text{zadana temperatura}),$$

$$-\epsilon^2 h'(x) \frac{\partial u}{\partial x} \pm \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{na} \quad y = \pm h(x) \quad (\text{izolowany brzeg}).$$

Rozgrzewka: przewodnictwo ciepła w wąskim pręcie

- Możemy więc rozwinąć u w szereg perturbacyjny (wygodnie jest rozwijać względem ϵ^2)

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \epsilon^2 u_1(x, y) + \dots$$

- Podstawiając powyższą zależność do naszych wzorów i porównując wyrazy przy $O(\epsilon^0)$ otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0 \text{ na } y = \pm h(x),$$

co daje nam $u_0 = u_0(x)$ i potwierdza naszą intuicję. Porównanie wyrazów rzędu $O(\epsilon^2)$ prowadzi do

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \quad \pm \frac{\partial u_1}{\partial y} - h'(x) \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \text{ na } y = \pm h(x),$$

którego rozwiązaniem jest $u_1(x, y) = \phi(x) - \frac{1}{2} u_0'' y^2$ a warunek brzegowy daje nam

$$h(x) u_0'' + h'(x) u_0' = 0, \quad \text{czyli} \quad (h(x) u_0')' = 0.$$

Przybliżenie cienkich powłok w mechanice płynów

- Najciekawsze zastosowania przybliżenia cienkich powłok występują w mechanice płynów.
- Będziemy zajmować się dwuwymiarowym przepływem lepkiego i nieściśliwego płynu newtonowskiego opisanego równaniem Naviera-Stokesa

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mathbf{f} + \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

gdzie $\mathbf{u} = (u, v)$ jest polem prędkości płynu, ρ gęstością płynu, p ciśnieniem, μ lepkością, a przez \mathbf{f} rozumiemy wszystkie siły zewnętrzne (na jednostkę masy) działające na objętość płynu (np. grawitacja).

Smarowanie łożysk (problem Reynoldsa)

- Rozważmy łożysko ślizgowe, czyli takie w którym dwie powierzchnie metalu oddzielone od siebie cienką warstwą oleju mogą się swobodnie poruszać (w biologii to na przykład kolano i inne stawy).
- Załóżmy, że mamy dane dwa kawałki metalu, z których górny ma kształt $y = Hh(x/L)$ i jest oddzielony olejem od dolnego, płaskiego.
- Oczywiście zakładamy, że $\epsilon := H/L \ll 1$.
- Możemy założyć, że podczas ruchu łożyska, dolna jego krawędź porusza się z prędkością U w prawo (układ odniesienia związany z górną powierzchnią).
- Przyjmijmy typowe warunki brzegowe dla równania N-S: przyleganie do ścianek (*no-slip conditions*)

$$(u, v) = (U, 0) \quad \text{na} \quad y = 0,$$

$$(u, v) = (0, 0) \quad \text{na} \quad y = Hh(x/L).$$

- W zagadnieniu tym interesuje nas zależność ciśnienia p od kształtu łożyska h .

Smarowanie łożysk (problem Reynoldsa)

- Odpowiednio przeskalujemy zmienne. Najpierw przestrzenne

$$x = Lx^*, \quad y = Hy^*.$$

- Składowa pozioma prędkości jest również w oczywisty sposób skalowana: $u = Uu^*$. Dla skalowania składowej pionowej musimy postąpić się równaniem ciągłości (nieściśliwość)

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{U}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{S}{H} \frac{\partial u^*}{\partial y^*},$$

gdzie S jest rzędem wielkości składowej pionowej $v = Sv^*$.

- Żądając, aby bezwymiarowe pochodne miały ten sam rząd musimy mieć $S = \epsilon U$.
- Dalej skalujemy czas: $T = L/U$, gdyż „większość ruchu“ płynu odbywa się w poziomie.
- Wyboru rzędu wielkości ciśnienia P dokonamy później.

Smarowanie łożysk (problem Reynoldsa)

- Po dokonanych skalowaniach, składowa pozioma równania N-S ma postać

$$\frac{\rho U^2}{L} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{P}{L} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu U}{H^2} \left(\epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

- W przypadku łożyska, mechanizmem generującym ciśnienie są siły ścinania wynikające z lepkości cieczy. Zatem odpowiednia skala ciśnienia powinna być dobrana tak, aby je równoważyć. Wybieramy zatem $P = \mu LU/H^2$, co prowadzi do

$$\epsilon^2 Re \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

gdzie $Re := \rho UL/\mu$ jest liczbą Reynoldsa.

- Podobnie możemy postąpić z równaniem na składową pionową prędkości

$$\epsilon^2 Re \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial p}{\partial y} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Smarowanie łożysk (problem Reynoldsa)

- Dzięki **różnym** skalowaniom składowych przestrzennych problemu otrzymaliśmy jawnie mały parametr ϵ .
- Trafny wybór skal wielkości jest często bardzo nietrywialną czynnością wymagającą uwagi, intuicji oraz zrozumienia zjawiska fizycznego.
- Powróćmy teraz do naszego zagadnienia i porównajmy człony które mają ten sam rząd wielkości. Otrzymujemy

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

- Zauważmy, że pochodne względem czasu występują dopiero w wyrazach o wyższym rzędzie, więc w naszym przybliżeniu przepływ jest stacjonarny.
- Warunki brzegowe odpowiedniego rzędu mają postać

$$(u, v) = (1, 0) \quad \text{na} \quad y = 0,$$
$$(u, v) = (0, 0) \quad \text{na} \quad y = h(x).$$

- Zauważamy najpierw, że $p = p(x)$. Czyli ciśnienie w wąskiej przestrzeni pomiędzy powierzchniami łożyska zmienia się jedynie w poziomie.

Smarowanie łożysk (problem Reynoldsa)

- Rozwiązując równanie drugiego rzędu dostajemy

$$u(x, y) = 1 - \frac{y}{h(x)} + \frac{1}{2}y(y - h(x))\frac{dp}{dx}.$$

- Otrzymaliśmy zatem pewne połączenie dwóch klasycznych przepływów: Couette (gdzie przesuwająca się ścianka wraz z lepkością generuje przepływ) oraz Poiseuille (przepływ jest spowodowany gradientem ciśnienia).
- Całkując ostatnie równanie otrzymujemy

$$v(x, y) = \frac{1}{4}y^2 \left(-2\frac{1}{h^2}\frac{dh}{dx} + \frac{dh}{dx}\frac{dp}{dx} + \left(h - \frac{2}{3}y \right) \frac{d^2p}{dx^2} \right),$$

gdzie skorzystaliśmy tylko z jednego warunku brzegowego, t.j.

$$v(x, 0) = 0.$$

- $v(x, h(x)) = 0$ wymaga od nas spełnienia **równania Reynoldsa**, że

$$6\frac{dh}{dx} = \frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dp}{dx} \right).$$

Smarowanie łożysk (problem Reynoldsa)

- Orzynaliśmy zatem związek między kształtem łożyska a ciśnieniem

$$6 \frac{dh}{dx} = \frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dp}{dx} \right).$$

- Znając kształt łożyska możemy w łatwy sposób policzyć jakie ciśnienie panuje wewnątrz i tym samym poznać maksymalne obciążenie jakie nasze łożysko jest w stanie wytrzymać.
- Dzięki intuicji i sensownemu korzystaniu z technik aproksymacji oraz rozwinięć asymptotycznych jesteśmy w stanie bardzo skomplikowany problem sprowadzić do prostszego, łatwiejszego w analizie i uzyskać kilka cennych informacji.
- Zauważmy, że kluczowym dla naszej analizy było dostosowanie do geometrii zagadnienia przeskalowanie zmiennych przestrzennych x i y oraz składowych prędkości u i v .
- Gdyby oba wymiary przestrzenne były tego samego rzędu, w naszych równaniach nigdy nie pojawiłby się ϵ , a tym samym nie moglibyśmy uprościć mniej znaczących członów.

Cienkie wstęgi szkła

- Zajmiemy się teraz trochę trudniejszym problemem dotyczącym cienkich wstęg lepkiego płynu.
- Sytuacja, w której trzeba rozważać takie zagadnienie pojawia się przy wytwarzaniu szkła typu *float*.
 - Gorąca mieszanka szklarska jest wlewana do wanny flotacyjnej, w której znajduje się roztopiony metal.
 - Ponieważ szkło ma mniejszy ciężar, unosi się nad metalem, a dzięki sile grawitacji przyjmuje doskonale płaski kształt.
- Łatwo sobie wyobrazić, że opisywane zjawisko jest właśnie przykładem zagadnienia, w którym można zastosować przybliżenie cienkich powłok (szkło może mieć powierzchnię dziesiątków metrów kwadratowych, a jedynie kilka milimetrów grubości).

Cienkie wstęgi szkła

- Wyobraźmy sobie cieką wstęgę szkła, która ma dwie powierzchnie: górną i dolną.
- Problemem, jaki przed nami stoi, jest znalezienie kształtu tych swobodnych powierzchni.
- Opiszmy te powierzchnie równaniami

$$y = H(g(x, t) \pm \frac{1}{2}h(x, t)),$$

czyli $Hg(x, t)$ jest linią środkową wstęgi, a $Hh(x, t)$ jej grubością w punkcie x i czasie t .

- Tak samo, jak poprzednio oznaczmy przez L typowy poziomy wymiar tafli, przez H pionowy oraz przez $\epsilon = H/L \ll 1$ parametr określający jakość przybliżenia.
- W procesie tworzenia tafli szkła, nalewanie przebiega bardzo wolno (skala poziomej prędkości: U), dlatego rozważmy równanie N-S w przybliżeniu wolnego przepływu

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Cienkie wstęgi szkła

- Mamy do czynienia ze swobodnymi brzegami: wymagane są odpowiednie warunki brzegowe.
 - Płyn przy powierzchni ma prędkość dokładnie taką samą jak brzeg (warunek *kinematyczny*).
 - Na brzegach nie występują żadne naprężenia (warunek *dynamiczny*).
- Zakładamy również, że tafla szkła, oprócz tego że jest bardzo cienka, jest też prawie płaska (krzywizna bliska 0).
- Przystępujemy do skalowania

$$x = Lx^*, \quad y = Hy^*, \quad u = Uu^*, \quad v = \epsilon Uv^*, \quad t = \frac{L}{U}t^*, \quad p = \frac{\mu U}{L}p^*,$$

Cienkie wstęgi szkła

- Zanim przystąpimy do bardziej systematycznej analizy posłużymy się intuicją.
 - Przepływ jest niemal jednowymiarowy w kierunku wzdłuż wstęgi (wzdłuż Ox).
 - Powierzchnia szkła jest pozbawiona naprężeń, więc prędkość przepływu w kierunku poziomym nie zmienia się za bardzo w pionie (ma postać $u = u(x, t)$).
 - Rozciąganie wstęgi jest skontrolowane przez naprężenia lepkościowe (proporcjonalne do $\partial u / \partial x$). Zatem całkowita siła (na jednostkę długości) jest proporcjonalna do $h \partial u / \partial x$, gdzie $h = h(x, t)$ jest grubością wstęgi.
 - Ponieważ nie ma innych sił to musimy mieć

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

gdź siła rozciągania jest stała wzdłuż całej wstęgi.

- Ostatnim równaniem jest zachowanie masy

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} = 0.$$

Cienkie wstęgi szkła

- Mimo, że nasza intuicyjna analiza prowadzi to (prawdopodobnie) poprawnego wyniku, to ma kilka wad.
- Przede wszystkim: jest na tyle poprawna na ile „czujemy” fizykę i jesteśmy w niej biegli.
- Nie wiemy nic o stałej proporcjonalności między siłami lepkościowymi a gradientem prędkości (jest to *lepkość Troutona*).
- Ta stała jest nam potrzebna do wyznaczenia ilościowych związków między kształtem tafli a siłami.
- Oczywiście, nie wiemy z jaką dokładnością poczyniliśmy nasze uproszczenia.

Cienkie wstęgi szkła

- Po wstawieniu naszych skalowań otrzymujemy

$$\epsilon^2 \frac{\partial p}{\partial x} = \epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \epsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

- Z kolei kinematyczny i dynamiczny warunek brzegowy na $y = g \pm 1/2h$ mają postać

$$v = \frac{\partial g}{\partial t} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial t} + u \left(\frac{\partial g}{\partial x} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (\text{kinematyczny}),$$

$$\epsilon^2 \left(-p + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial x} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial y} + \epsilon^2 \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{dynamiczny}),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \epsilon^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial x} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \right) = -p + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{dynamiczny}).$$

Interludium: warunki kinematyczny i dynamiczny

- Te dwa typy warunków są konieczne w badaniu zagadnień o swobodnych powierzchniach.
 - **Warunek kinematyczny** jest żądaniem, aby cząsteczki płynu na powierzchni pozostawały tamże. To znaczy, że ich prędkość musi być taka sama jak prędkość swobodnej powierzchni:

$$\frac{d}{dt}(y(t) - h(x, t)) = 0 \quad \text{na} \quad y = h(x, t),$$

co daje nam

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{na} \quad y = h(x, t).$$

- **Warunek dynamiczny** mówi, że żadne naprężenia nie mogą działać na swobodną powierzchnię, czyli

$$\sigma_{ij} n_j = 0, \quad 1 \leq i, j \leq 3 \quad (\text{konwencja sumacyjna}),$$

gdzie σ jest tensorem naprężeń ($\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$) a \bar{n} wektorem normalnym do powierzchni swobodnej.

Cienkie wstęgi szkła

- Stosujemy rachunek zaburzeń względem ϵ^2

$$u = u_0 + \epsilon^2 u_1 + \dots, \quad v = v_0 + \epsilon^2 v_1 + \dots, \quad p = p_0 + \epsilon^2 p_1 + \dots, \\ g = g_0 + \epsilon^2 g_1 + \dots, \quad h = h_0 + \epsilon^2 h_1 + \dots$$

- Szybko możemy uzyskać przybliżenie rzędu ϵ^0

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0,$$

co razem z warunkiem dynamicznym

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = 0 \quad \text{na} \quad y = g_0 \pm \frac{1}{2} h_0$$

daje nam

$$u_0 = u_0(x, t),$$

czyli przepływ jest w zasadzie jednowymiarowy.

Cienkie wstęgi szkła

- Z równania ciągłości otrzymujemy od razu

$$v_0(x, y, t) = A(x, t) - y \frac{\partial u_0}{\partial x},$$

gdzie $A(x, t)$ znajdujemy z warunku kinematycznego

$$A(x, t) = \frac{\partial g_0}{\partial t} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u_0 \left(g_0 \pm \frac{1}{2} h_0 \right) \right).$$

- Otrzymaliśmy dwa warunki na $A(x, t)$ (jeden z $+$ i jeden z $-$), więc aby były one zgodne musimy mieć

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_0 h_0) = 0.$$

Jest to równanie opisujące zachowanie masy.

Cienkie wstęgi szkła

- Prędkość w pionie jest postaci

$$v_0(x, y, t) = \frac{\partial g_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_0(g_0 - y)).$$

- Stąd i z $\frac{\partial p}{\partial y} = \epsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ wnioskujemy, że

$$p = p(x, t).$$

- A jeśli dodatkowo weźmiemy pod uwagę warunek dynamiczny to otrzymamy

$$p(x, t) = -2 \frac{\partial u_0}{\partial x}.$$

- To wszystko, co udaje nam się otrzymać z rozważania wiodącego rzędu ϵ .
- Aby otrzymać kolejne warunki, musimy rozważyć wyrazy rzędu ϵ^2 .
Obliczenia są pracochłonne, ale przebiegają w zasadzie tak samo jak dotychczas.

Cienkie wstęgi szkła

- Powracając do głównego równania $\epsilon^2 \frac{\partial p}{\partial x} = \epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ i biorąc pod uwagę wyrazy rzędu ϵ^2 dostajemy

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = -3 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$$

- Podobnie jak poprzednio, żądając aby drugi warunek dynamiczny był spełniony musimy mieć

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(4h_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = 0.$$

- Podobne (dość długie) obliczenia dają nam ostatni warunek (równowaga sił)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(4h_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial g_0}{\partial x} \right) = 0.$$

- Możemy zatem znaleźć u_0 , h_0 i g_0 .

Cienkie wstęgi szkła

- Zauważmy, że w powyższych równaniach występuje czynnik 4, który jest związany z liczbą Troutona.
- Jest on ważny z tego powodu, że $4h_0\partial u_0/\partial x$ jest (bezwymiarowym) naprężeniem wstęgi.
- Rozwiązanie hiperbolicznego układu

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_0 h_0) = 0.$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(4h_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = 0.$$

daje nam prędkość poziomą u_0 oraz grubość wstęgi h_0 .

- Położenie linii środkowej wstęgi otrzymujemy następnie z

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(4h_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial g_0}{\partial x} \right) = 0.$$

Rozlany miód

- Wyobraźmy sobie lepki płyn rozlany na podłogę (np. miód). Chcemy zbadać w jakim tempie będzie następował przepływ i jaki będzie kształt powierzchni swobodnej.
- Tutaj posłużymy się jedynie intuicją, ale analiza cienkich warstw również działa tutaj bez problemów.
 - Przepływ jest wolny, więc użyjemy równania N-S bez pochodnych czasowych.
 - Ciśnienie oraz siły lepkościowe rządzą. Ciśnienie jest prawie hydrostatyczne $p = \rho g(h(x, t) - y)$.
 - Składowa pozioma prędkości u dominuje a powierzchnia jest prawie płaska. Naprężenie ścinania na powierzchni $\approx \mu \partial u / \partial y$ znika.
 - Dzięki temu możemy lokalnie traktować przepływ jako symetryczny pomiędzy dwoma płytami $y = 0$ i $y = 2h$ (gdzie bierzemy tylko połowę). Postać prędkości jest zatem paraboliczna $u(x, y, t) = -\frac{1}{2\mu} y(2h(x, t) - y) \frac{\partial p}{\partial x}$.
 - Strumień wynosi zatem $q(x, t) = \rho \int_0^h u(x, y, t) dy = -\frac{1}{3\mu} h^3 \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\rho g}{3\mu} h^3 \frac{\partial h}{\partial x}$
 - Zachowanie masy daje $\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho g}{3\mu} \frac{\partial}{\partial x} (h^3 \frac{\partial h}{\partial x})$.

Rozlany miód

- Otrzymaliśmy bardzo ciekawe równanie

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho g}{3\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial h}{\partial x} \right).$$

- Jeśli byśmy rozpatrzyli warstwę farby na podłodze, gdzie przepływ rządzony jest przez siły lepkości, to otrzymalibyśmy równanie czwartego rzędu

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\gamma}{3\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right).$$

- Jeśli farba by była nałożona na ścianę, to mielibyśmy równanie pierwszego rzędu

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\rho g}{3\mu} h^2 \frac{\partial h}{\partial x}.$$

- Są to równania, które spotkały się z zaciekawieniem teoretyków!

Problemy z widzeniem

- Rogówka oka ludzkiego jest również idealnym miejscem na zastosowanie przybliżenia cienkich powłok.
- Film łzowy, który nawilża i odżywia rogówkę ma grubość rzędu $10\mu\text{m}$. Typowa rogówka ma promień rzędu 5mm . Zatem

$$\epsilon = \frac{10}{5000} = 0.002 \ll 1.$$

- Zbyt mała produkcja łez, zbyt szybkie parowanie \rightarrow „suche oko”.
- Break-up Time (BUT) jest zdefiniowany zwykle jako czas wystąpienia pierwszego suchego obszaru zaraz po mrugnięciu.
- Ważny parametr mierzony często przez okulistów. Bardzo zależny od warunków, ale zwykle wynosi 20 – 30s.
- Bardzo dobre oszacowania na BUT otrzymali Braun i Fitt w [1] .
- Model: przybliżenie cienkich warstw dla równania Naviera-Stokesa + parowanie i grawitacja.

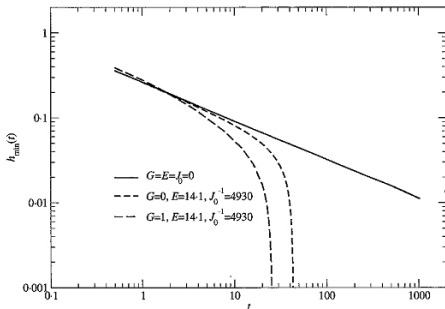
Problemy z widzeniem

- Główne równanie modelu dla swobodnego brzegu:

$$h_t + \frac{E}{J_0^{-1} + h} + \left[\frac{h^3}{12} (h_{xxx} + G) \right]_x = 0,$$

gdzie E , J_0 - stałe związane z temperaturą i parowaniem.

- Braun i Fitt rozwiązywali równanie numerycznie na siatce złożonej z 4000 punktów. Za BUT przyjęli czas, w którym h było mniejsze niż wielkość siatki.



Pizza

- W pracy [2] Howell i in. rozpatrywali problem cienkiej warstwy rozciąganej przez siłę odśrodkową (pizza).
- Główne założenie: płyn jest newtonowski (pizza nie jest).
- Przepływ osiowosymetryczny wzdłuż promienia - wystarczy rozpatrywać prędkość radialną $u = u(r, t)$ oraz grubość pizzy $h = h(r, t)$.
- Zanedbujemy bezwładność i napięcie powierzchniowe (poprawne, jeśli Re jest mała). Przepływ jest wynikiem równowagi między lepkością a siłą odśrodkową.
- W postaci bezwymiarowej równanie na równowagę naprężeń ma postać

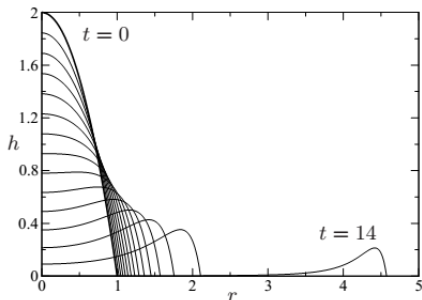
$$4 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} \right) - 2 \frac{u}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = -rh.$$

- Zachowanie masy daje nam

$$\frac{\partial}{\partial t}(rh) + \frac{\partial}{\partial r}(rhu) = 0.$$

Pizza

- Obliczenia numeryczne oraz analiza asymptotyczna pokazują, że pizza uformuje się w bardzo cieką warstwę przy $r \rightarrow 0$ z wybrzuszeniem na końcu $r \rightarrow R(t)$.
- Okazuje się, że po pewnym, skończonym czasie promień $R(t)$ wybucha do nieskończoności.



(a) "drop": $h_0 = 2(1 - r^2)$

Podsumowanie

- Dokonałiśmy przeglądu kilku przykładów związanych z zastosowaniem przybliżeń cienkich powłok.
- Przykłady były dobrane tak, aby jak najjaśniej ukazać przydatność oraz technikę analizowania modeli matematycznych i wyciągania z nich użytecznych wniosków.
- Bardzo często zdarza się tak, że posiadanie przybliżonego rozwiązania danego zagadnienia mówi nam dużo więcej o mechanizmie zjawiska niż nawet najdokładniejsze obliczenia numeryczne.
- Podejście analityczne (przybliżone) oraz numeryczne w bardzo spójny sposób uzupełniają się pokazując jak matematyka doskonale opisuje zjawiska w przyrodzie.

Referencje

Wykład ten oparty został na poniższych pracach.

- S.Howison, *Practical Applied Mathematics: Modelling, Analysis, Approximation*, Cambridge University Press, 2005
- C.C.Lin, L.A.Segel, *Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences*, SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1988
- P.D.Howell, *Models for thin viscous sheets*, Europ. J. Appl. Math. 7, 321–343, 1996
- O.Reynolds, *On the Theory of Lubrication and Its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments*, Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil, Proceedings of the Royal Society of London 40 (242-245), 191–203, 1886