Polski Rejestr Statków

Modelowanie ruchu cieczy w wybranych zagadnieniach hydrodynamiki okrętu

dr Monika Warmowska
Polski Rejestr Statków S.A., Gdańsk
Pion Naukowo – Badawczy
m.warmowska@prs.pl

Polski Rejestr Statków S.A., Gdańsk
Pion Naukowo – Badawczy
www.prs.pl

Polski Rejestr Statków S.A. (PRS) jest niezależną instytucją rzeczoznawczą, prowadzącą działalność na rynku międzynarodowym.
Poprzez formułowanie wymagań, nadzór wydawanie odpowiednich dokumentów, PRS pomaga administracjom państwowym, ubezpieczycielom swoim klientom zapewnić bezpieczeństwo ludzi, obiektów pływających, obiektów lądowych, ładunków oraz środowiska naturalnego.

W ciągu ponad 75 lat funkcjonowania, PRS zgromadził kapitał wiedzy i doświadczenia.

Grupa inspektorów i naukowców **PRS**, systematycznie zajmujących się rozwiązywaniem problemów naukowo-badawczych związanych z bezpieczeństwem konstrukcji statku, **tworzy narzędzia do przeprowadzania potrzebnych analiz i symulacji zachowania się statku na fali**, zachowania konstrukcji statku i wyposażenia w warunkach mających wpływ na bezpieczeństwo jednostki.

W dziele tym PRS współpracuje z polskimi uczelniami technicznymi i morskimi, placówkami naukowo – badawczymi, stoczniami, biurami projektowymi.

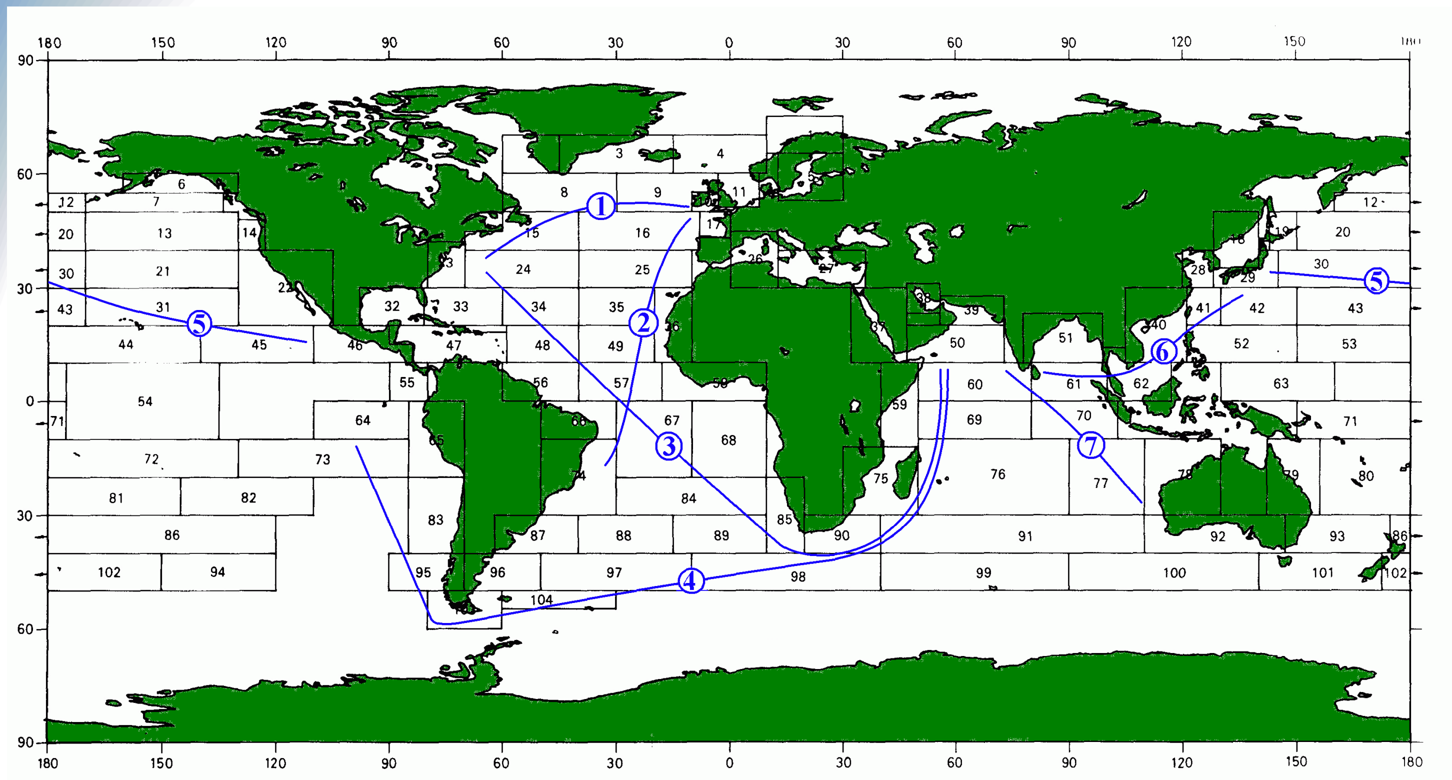
Polski Rejestr Statków

Modelowanie ruchu cieczy w wybranych zagadnieniach hydrodynamiki okrętu

Plan prezentacji

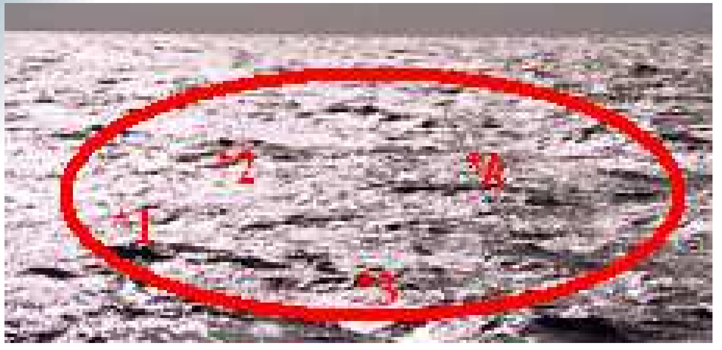
1. **Falowanie morskie**
   - Spektrum falowania
   - Składowe harmoniczne
   - Fala grawitacyjna
     - Zagadnienie liniowe ruchu fali biegnącej
     - Ruch wokół średniego położenia
     - Porównanie obu modeli
2. **Ruch cieczy w zbiorniku okrętowym**
   - Sformułowanie zagadnienia
   - Zagadnienie liniowe ruchu fali stojącej
   - Rozwiązanie numeryczne zagadnienia nieliniowego ruchu cieczy w zbiorniku
3. **Woda na pokładzie**
   - Sformułowanie zagadnienia
   - Metoda wody płytkiej

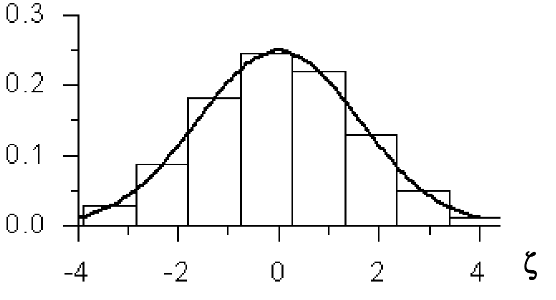
Falowanie morskie



4

Zbiór procesów stochastycznych

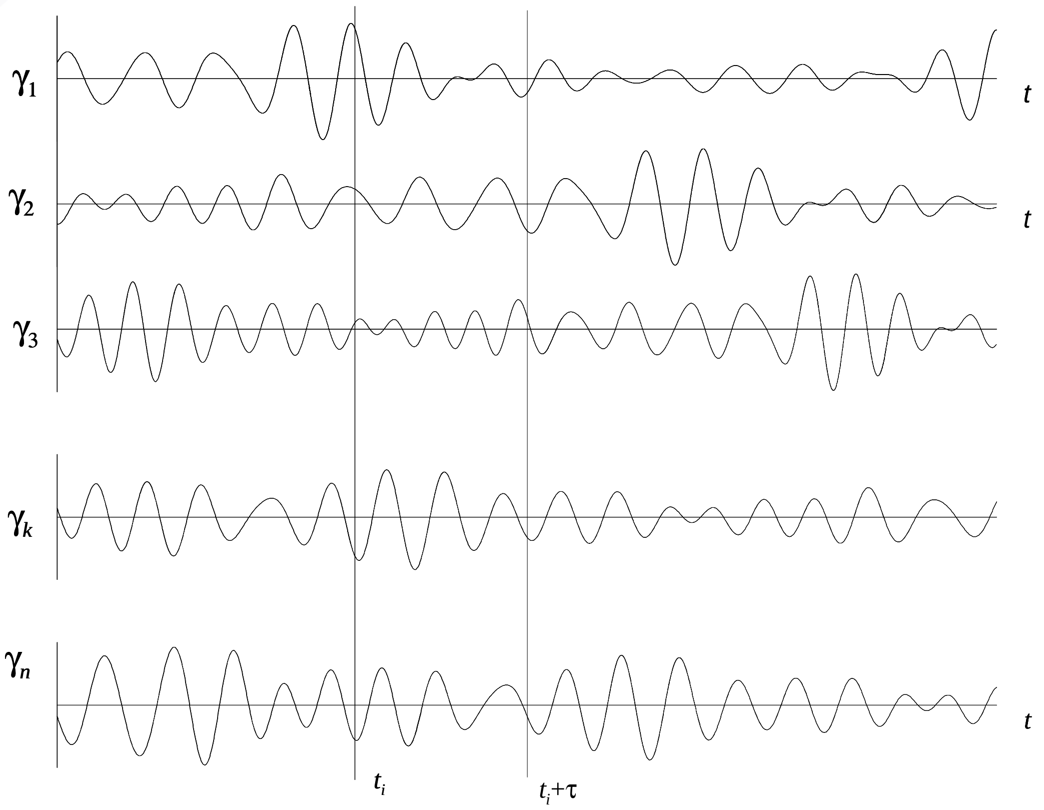




Histogram

Zbiór (rodzinę) zmiennych losowych złożonych z n elementowych zapisów rzędnych fali w określonym czasie t_i, $\{\gamma_1(t_i), \gamma_2(t_i), .., \gamma_n(t_i)\}$ nazywamy zbiorem procesów stochastycznych.

Falowanie morskie



Falowanie morskie

Falowanie morskie jest procesem losowym, opisanym charakterystykami widmowymi i statystycznymi. Charakterystyka widmowa falowania oparta jest na matematycznej teorii funkcji losowych, w której zakłada się, że falowanie morskie jest procesem, w którym:

— **rzędne falowania są zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym**,

— charakterystyki procesu są niezależne od czasu (dla danego stanu morza) tzn. **proces jest stacjonarny**,

— charakterystyki procesu otrzymane w oparciu o zapis czasowy i zapis przestrzenny są takie same tzn. **proces jest ergodyczny**,

— charakterystyki procesu nie zależą od miejsca, w którym zostały wyznaczone tzn. **proces jest jednorodny**.

Literatura:

Ochi M.K., Ocean waves. The stochastic approach, Cambridge, 1998

Polski Rejestr Statków

Falowanie morskie – spektrum falowania

Statystyka:

Liczba wystąpień stanów morza na 100 000 przypadków dla Północnego Atlantyku

	Tz															
Hs	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5	13,5	14,5	15,5	16,5	17,5	18,5
0,5	1,3	133,7	865,6	1186	634,2	186,3	36,9	5,6	0,7	0,1	0	0	0	0	0	0
1,5	0	29,3	986	4976	7738	5569,7	2375,7	703,5	160,7	30,5	5,1	0,8	0,1	0	0	0
2,5	0	2,2	197,5	2158,8	6230	7449,5	4860,4	2066	644,5	160,2	33,7	6,3	1,1	0,2	0	0
3,5	0	0,2	34,9	695,5	3226,5	5675	5099,1	2838	1114,1	337,7	84,3	18,2	3,5	0,6	0,1	0
4,5	0	0	6	196,1	1354,3	3288,5	3857,5	2685,5	1275,2	455,1	130,9	31,9	6,9	1,3	0,2	0
5,5	0	0	1	51	498,4	1602,9	2372,7	2008,3	1126	463,6	150,9	41	9,7	2,1	0,4	0,1
6,5	0	0	0,2	12,6	167	690,3	1257,9	1268,6	825,9	386,8	140,8	42,2	10,9	2,5	0,5	0,1
7,5	0	0	0	3	52,1	270,1	594,4	703,2	524,9	276,7	111,7	36,7	10,2	2,5	0,6	0,1
8,5	0	0	0	0,7	15,4	97,9	255,9	350,6	296,9	174,6	77,6	27,7	8,4	2,2	0,5	0,1
9,5	0	0	0	0,2	4,3	33,2	101,9	159,9	152,2	99,2	48,3	18,7	6,1	1,7	0,4	0,1
10,5	0	0	0	0	1,2	10,7	37,9	67,5	71,7	51,5	27,3	11,4	4	1,2	0,3	0,1
11,5	0	0	0	0	0,3	3,3	13,3	26,6	31,4	24,7	14,2	6,4	2,4	0,7	0,2	0,1
12,5	0	0	0	0	0,1	1	4,4	9,9	12,8	11	6,8	3,3	1,3	0,4	0,1	0
13,5	0	0	0	0	0	0,3	1,4	3,5	5	4,6	3,1	1,6	0,7	0,2	0,1	0
14,5	0	0	0	0	0	0,1	0,4	1,2	1,8	1,8	1,3	0,7	0,3	0,1	0	0
15,5	0	0	0	0	0	0	0,1	0,4	0,6	0,7	0,5	0,3	0,1	0,1	0	0
16,5	0	0	0	0	0	0	0	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1	0	0	0

Hs – wysokość znacząca fali,

Tz – średni okres przekroczeń miejsc zerowych.

Literatura:

British Maritime Technology, Hogben, Global Wave Statistics, 1986, Unwin Brothers Limited, London

Falowanie morskie – spektrum falowania

Statystyka

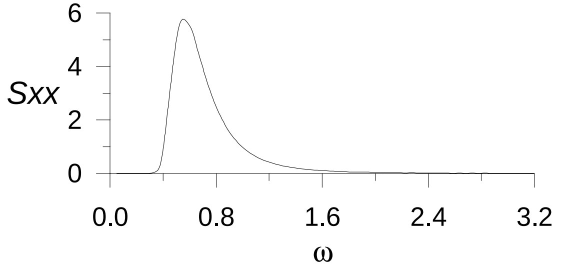
Siła wiatru °B	Znacząca wysokość fali $\bar{\zeta}_w{}^1/3$ [m]			Okres charakterystyczny $\bar{T}_1$ [s]		
	Pn. Atlantyk	Morze Północne	Bałtyk	Pn. Atlantyk	Morze Północne	Bałtyk
3	1,70	1,00	0,45	6,3	4,6	2,9
4	1,95	1,40	0,60	6,5	4,9	3,4
5	2,40	2,00	0,85	6,9	5,4	3,8
6	3,10	3,00	1,20	7,4	6,1	4,4
7	4,00	4,00	1,60	8,0	6,8	4,8
8	5,25	5,60	1,95	8,5	7,7	5,3
9	6,45	6,60*	2,50	9,1	8,4	5,8
10	7,45	7,20*	3,15	9,6	9,0	6,0
11	8,40*	7,50*	3,80*	10,1*	9,6*	6,3*
12	9,20*	7,70*	4,30*	10,6*	10,3*	6,5*

*H*s – wysokość znacząca fali,
*T*z – średni okres przekroczeń miejsc zerowych.
Literatura:
Dudziak Jan, Teoria okrętu, 1988, Wydawnictwo Morskie, Gdańsk

Spektrum falowania

Spektrum falowania dla procesu stochastycznego γ(*t*) jest definiowana jako:

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi T} \left| X(\omega) \right|^2$$



gdzie $X(\omega)$ – transformatą Fouriera funkcji γ(*t*).

Spektrum falowania Pierson – Moskowitz dla Północnego Atlantyku:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{4H_s^2\pi^3}{T_z^3\omega^5} \exp\left[-\frac{16\pi^3(\pi)}{(T_z\omega)^4} \right]$$

H_s – znacząca wysokość fali,

T_z – średni okres przekroczenia miejsc zerowych.

Falowanie morskie – składowe harmoniczne

Rzędną fali nieregularnej możemy przedstawić w postaci sumy składowych (rzędnych) harmonicznych fali regularnej:

$$\zeta(t) = \sum_i A_i \cos(\omega_i t + \varepsilon_i)$$

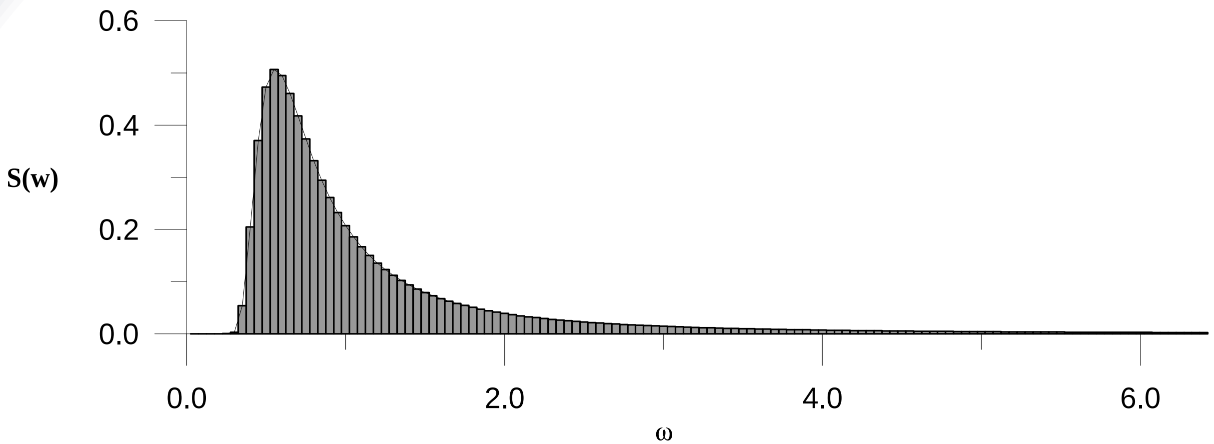
gdzie

A_i jest amplitudą fali harmonicznej o częstości ω_i,

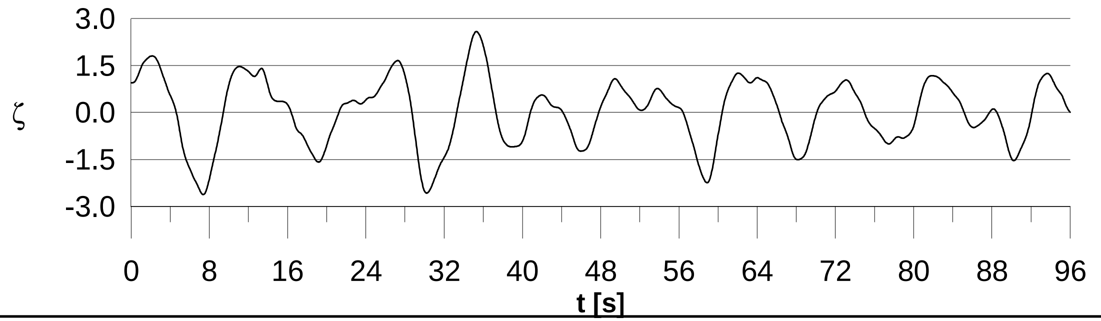
ε_i jest parametrem stochastycznym.

Falowanie morskie – składowe harmoniczne

Spektrum falowania dla $T_z \approx 8$s, $H_s \approx 4$m $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 0{,}785 \ \ [1/s]$
128 składowych falowania

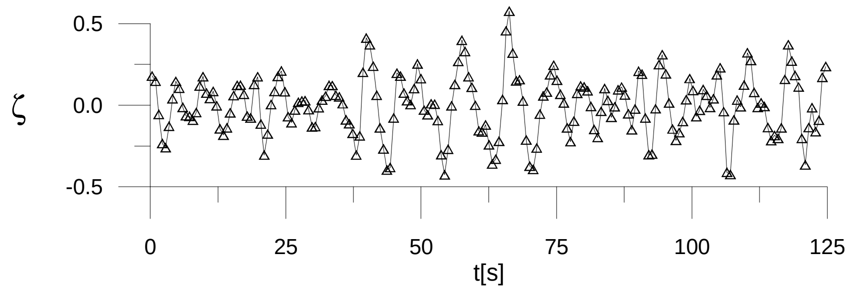


Rzędna fali w ustalonym punkcie (x,y)



Falowanie morskie – składowe harmoniczne

Dla zadanej realizacji procesu falowania poszukujemy parametrów składowych harmonicznych



Metody stosowane do znajdowania składowych harmonicznych dla zadanej fali nieregularnej:

- Metoda Transformaty Fouriera,
- Metoda najmniejszych kwadratów.

Wnioski
W przypadku, gdy stosowany jest stały przyrost częstości składowych harmonicznych obie metody są identyczne.

Falowanie morskie – modelowanie ruchu fali grawitacyjnej

Parametry definiujące falę regularną (grawitacyjną – opisującą ruch fali regularnej wokół obiektu pływającego):

— gęstość $\rho\,(x,y,z,t)$ cieczy,

— współczynnik lepkości $\nu\,(x,y,z,t)$,

— wektorowe pole prędkości $\mathbf{v}(x,y,z,t)=(u_1(x,y,z,t),\ u_2(x,y,z,t),\ u_3(x,y,z,t))$,

— skalarne pole ciśnienia $p(x,y,z,t)$.

Założenia :

— cieczy jest nielepka, $\nu = 0$,

— ciecz jest nieściśliwa,

— ciecz ma stałą gęstość w całej objętości, $\rho(x,y,z,t)=const$

— barotropowa,

— ciśnienie na swobodnej powierzchni jest stałe równe stałej wartości ciśnieniu atmosferycznemu,

$$p(x,y,\zeta)=p_a$$

— siłą zewnętrzną działającą na cząsteczki wody jest siła ciążenia.

Równanie ruchu (r. Eulera) dla cieczy potencjalnej przyjmuje postać:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} grad p + \mathbf{U}, \qquad \mathbf{U} = (0,0,-g), \qquad (x(t), y(t), z(t), t) \in \Omega$$

gdzie $\mathbf{v}$ – wektor prędkości,
p – ciśnienie,
$\mathbf{U}$ – potencjał sił zewnętrznych,
g – przyspieszenie ziemskie,
ρ – gęstość cieczy.

Równanie zachowania masy dla cieczy o stałej gęstości (ρ=*const)* jest postaci:

$$\nabla \mathbf{v} = 0, \qquad (x(t), y(t), z(t), t) \in \Omega.$$

Przyjęte założenia pozwalają na przyjęcie **model**u **cieczy potencjalnej**.

Istnieje potencjał ϕ prędkości **v** składowej harmonicznej fali:

$$\nabla \phi(t) = \mathbf{v}(t), \quad \mathbf{v}(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right).$$

Z zasady zachowania masy otrzymujemy **równanie Laplace'a** dla potencjału ϕ, spełnione dla wszystkich cząstek cieczy objętości Ω:

$$\Delta \phi = 0, \qquad (x(t), y(t), z(t), t) \in \Omega(t).$$

Falowanie morskie – modelowanie ruchu fali grawitacyjnej

Z równania Eulera, przy założeniu, że ciecz jest potencjalna, otrzymujemy **równanie Bernouliego**:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla \phi|^2 + gz + \frac{p - p_a}{\rho} = c(t), \qquad (x((t), y(t), z(t)) \in \Omega(t).$$

Rzędna fali $\zeta(x(t),y(t),t) = z(t)$ w dowolnej chwili t otrzymywana jest ze zlinearyzowanej postaci równania Bernouliego, określona jest wzorem:

$$\zeta(x(t), y(t), t) = -\frac{1}{g}\frac{\partial \phi}{\partial t}, \qquad (x(t), y(t), z(t)) \in S_F(t).$$

Po zróżniczkowaniu otrzymujemy **warunek na swobodnej powierzchni**:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \qquad (x(t), y(t), z(t)) \in S_F(t).$$

Dla akwenów o skończonej głębokości *H* dodatkowo będziemy zakładać, że **składowa wertykalna** v_z wektora prędkości **v** cząstki **zanika**:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \qquad (x(t), y(t), -H) \in S_D.$$

Falowanie morskie – modelowanie ruchu fali grawitacyjnej

Otrzymujemy **zagadnienie Laplace'a**, które musi spełniać potencjał prędkości ϕ:
Równanie Laplace'a

$$\Delta\phi = 0, \qquad (x(t), y(t), z(t)) \in \Omega(t),$$

z warunkiem na swobodnej powierzchni:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0, \qquad (x(t), y(t), z(t)) \in S_F(t).$$

Dla akwenów o skończonej głębokości H dodatkowo zakłada się, że składowa wertykalna u_z wektora prędkości zanika:

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0, \qquad (x(t), y(t), -H) \in S_D(t).$$

Rozwiązanie zagadnienie Laplace'a:

$$\Delta\phi = 0, \quad (x,z) \in \Omega,$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \qquad (x,z) \in S_F.$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \qquad (x,-H) \in S_D,$$

otrzymujemy przy zastosowaniu metody rozdzielenia zmiennych :

$$\phi(x,z,t) = X(x)Z(z)\varphi(t), \qquad (x,z,t) \in \Omega.$$

Wówczas **z równania Laplace'a** otrzymujemy:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2.$$

Rozwiązanie ogólne przyjmuje postać:

$$X = c_1 \cos(kx + \varepsilon_1),$$

$$Z = d_1 e^{-kz} + d_2 e^{kz}.$$

Dla wody o skończonej głębokości *H* **(wody płytkiej) z warunku na dnie** $\boldsymbol{S}_{\mathbf{D}}$, otrzymamy:

$$\varphi X \frac{dZ}{dz} = 0, \quad z = -H.$$

Zatem korzystając z postaci rozwiązania ogólnego mamy nową **postać rozwiązania dla funkcji** ***Z***:

$$Z = D\cosh\left(k\left(z + H\right)\right).$$

Z warunku na swobodnej powierzchni $\boldsymbol{S}_{\mathbf{F}}$ i postaci funkcji *Z*:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\varphi\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz} = 0, \quad (x,z) \in S_F, \qquad \frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz} = k\tanh\left(k\left(z + H\right)\right).$$

otrzymujemy równanie (linearyzujemy to równanie – przyjmując, że odchylenie swobodnej powierzchni jest niewielkie $z \cong 0$):

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0, \quad (x, z \cong 0) \in S_F, \qquad \omega^2 = kg\tanh\left(kH\right).$$

Funkcja φ jest postaci:

$$\varphi = c_2\cos(\omega t + \varepsilon_2)$$

Falowanie morskie – modelowanie ruchu fali grawitacyjnej dla wody płytkiej

Zatem dla wody płytkiej (o skończonej głębokości) zagadnienia Laplace'a:

$$\Delta\phi = 0, \quad (x,z)\in\Omega,$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0, \qquad (x,z)\in S_F. \qquad \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0, \qquad (x,-H)\in S_D,$$

spełnione jest przez potencjał ϕ postaci:

$$\phi(x,z,t) = C\cosh(k(z+H))\sin(kx-\omega t+\varepsilon), \quad (x,z,t)\in\Omega(t).$$

Korzystając ze zlinearyzowanej postaci warunku na swobodnej powierzchni:

$$\zeta = -\frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t}, \qquad (x, z=\zeta)\in S_F,$$

otrzymujemy **wzór rzędne fali ζ**:

$$\zeta(x,t) = C\frac{\omega}{g}\sinh(kH)\cos(kx-\omega t+\varepsilon), \quad (x,z,t)\in S_F(t).$$

gdzie

• dla wody o określonej głębokości H

$$\omega^2 = kg\tanh(kH),$$

Falowanie morskie – modelowanie ruchu fali grawitacyjnej dla wody płytkiej

Dla wody o skończonej głębokości potencjał prędkości ϕ fali grawitacyjnej, spełniającej zlinearyzowane zagadnienie Laplace'a, przyjmuje postać:

$$\phi(x,z,t) = C\cosh(k(z+H))\sin(kx-\omega t+\varepsilon), \quad (x,z,t)\in\Omega(t).$$

Kształt swobodnej powierzchni dla takiej fali opisuje wzór:

$$\zeta(x,t) = r_0\cos(kx-\omega t+\varepsilon), \quad (x,z,t)\in\Omega(t).$$

gdzie

$$r_0 = C\frac{\omega}{g}\sinh(kH).$$

Pole prędkości otrzymujemy ze wzoru:

$$\mathbf{v}(x,z,t) =$$
$$(k\cosh(k(z+H))\cos(kx-\omega t+\varepsilon), k\sinh(k(z+H))\sin(kx-\omega t+\varepsilon)), \quad (x,z,t)\in\Omega(t).$$

Związek dyspersyjny dla wody płytkiej opisany jest wzorem:

$\omega^2 = kg\,\mathrm{tangh}(kH)$.

Falowanie morskie – modelowanie ruchu fali grawitacyjnej dla wody głębokiej

Rozwiązanie zagadnienie Laplace'a:

$$\Delta\phi = 0, \quad (x,y,z)\in\Omega,$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0, \qquad (x,y,z)\in S_F. \qquad \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0, \qquad (x,y,-H)\in S_D,$$

Szukamy rozwiązania postaci:

$$\phi(x,z,t) = X(x)Z(z)\varphi(t), \qquad (x,z,t)\in\Omega.$$

Wiemy już, że rozwiązanie ogólne przyjmuje postać:

$$X = c_1\cos(kx+\varepsilon_1), \qquad Z = De^{kz}$$

Z warunku na swobodnej powierzchni S_F i postaci funkcji *Z*:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\varphi\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz} = 0, \quad (x,z)\in S_F, \qquad \frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz} = k.$$

otrzymujemy równanie:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0, \quad (x,z\cong 0)\in S_F, \qquad \omega^2 = kg.$$

Funkcja φ jest postaci:

$$\varphi = c_2\cos(\omega t+\varepsilon_2)$$

Falowanie morskie – modelowanie ruchu fali grawitacyjnej dla wody głębokiej

Dla wody głębokiej potencjał prędkości ϕ fali grawitacyjnej, spełniającej zlinearyzowane zagadnienie Laplace'a, przyjmuje postać:

$$\phi(x,z,t) = \frac{\omega}{k} r_0 e^{kz} \sin(kx - \omega t + \varepsilon), \quad (x,z,t) \in \Omega(t).$$

Kształt swobodnej powierzchni dla takiej fali opisuje wzór:

$$\zeta(x,t) = r_0 \cos(kx - \omega t + \varepsilon), \quad (x,z,t) \in \Omega(t).$$

Pole prędkości otrzymujemy ze wzoru:

$$\mathbf{v}(x,z,t) = \left(\omega r_0 e^{kz} \cos(kx - \omega t + \varepsilon), \omega r_0 e^{kz} \sin(kx - \omega t + \varepsilon)\right), \quad (x,z,t) \in \Omega(t).$$

Związek dyspersyjny dla wody głębokiej opisany jest wzorem:

$$\omega^2 = kg$$

Literatura:

Krężelewski Mieczysław, Hydromechanika ogólna i okrętowa, 1982,Wydawnictwo politechniki Gdańskiej,, Gdańsk

Falowanie morskie – składowe harmoniczne

Rzędną fali nieregularnej możemy przedstawić w postaci sumy składowych (rzędnych) harmonicznych fali regularnej:

$$\zeta(t) = \sum_i A_i \cos(\omega_i t + \varepsilon_i)$$

gdzie

A_i jest amplitudą fali harmonicznej o częstości ω_i,

e_i jest parametrem stochastycznym.

Dla dowolnego punktu *x*, rzędne fali można otrzymać ze wzoru:

$$\zeta(x,t) = \sum_i A_i \cos(kx - \omega_{0i} t + \varepsilon_i)$$

gdzie
(x, ζ) –współrzędne punktu swobodnej powierzchni fali,
t – czas,
ω_{0i} – i-ta częstość składowej harmonicznej,
k_i – liczby falowe dla wody głębokiej określone wzorem: $k = \dfrac{\omega_{0i}^{\;2}}{g}$

Uwaga:
Zachodzą następujące zależności: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Gdzie λ jest długością fali.

24

Polski Rejestr Statków

Falowanie morskie – składowe harmoniczne

Niech układ porusza się w określonym kierunku ruchem jednostajnym ze stałą prędkością u, wówczas rzędna fali ζ w takim układzie jest opisywana równaniem:

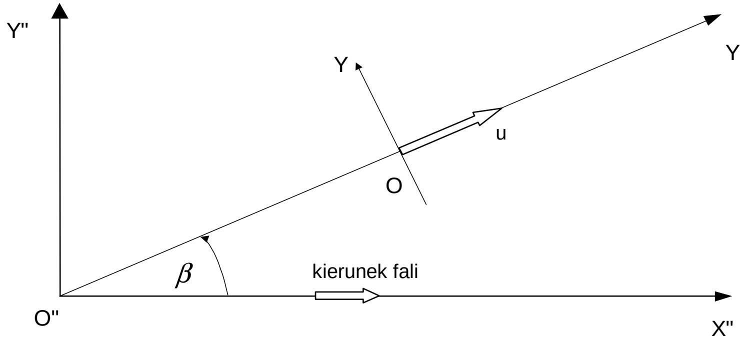
$$\zeta(x,y,t)=\sum_i A_i\cos(k_x x+k_y y-\omega_i t+\varepsilon_i)$$

gdzie
(x, y, ζ) –współrzędne punktu fali, w układzie inercjalnym,
t – czas,
ω_{0i} – składowe częstości fal harmonicznych,
β - kąt napływu fali,
ω_i – i-ta częstość spotkaniowa składowej harmonicznej,
k_x i k_y – liczby falowe określone wzorem:

$$k_x=\frac{\omega_{0i}^2}{g}\cos(\beta) \qquad k_y=\frac{\omega_{0i}^2}{g}\sin(\beta)$$

Częstość spotkaniowa wyraża się wzorem:

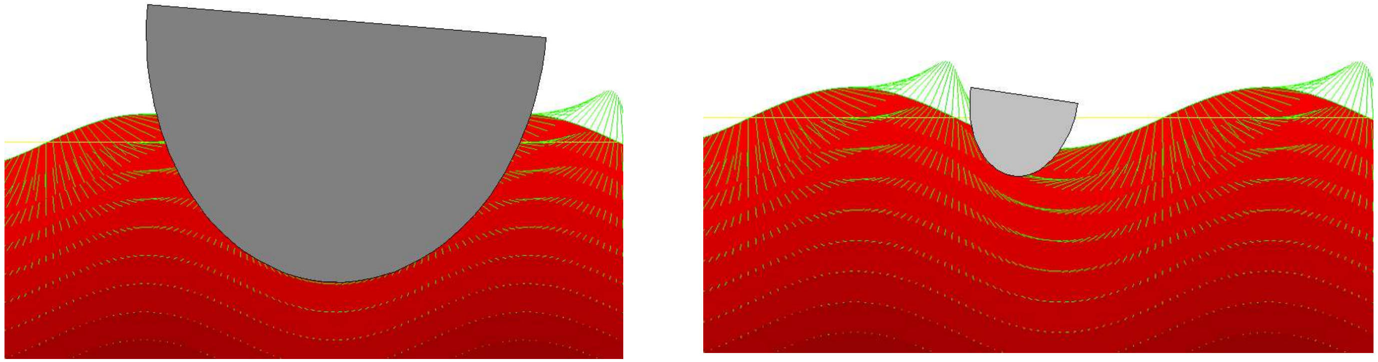
$$\omega_i=\omega_{0i}\left|1-\frac{\omega_{0i}u}{g}\cos(\beta)\right|$$



Teoria liniowa

Istnieje potencjał ϕ prędkości składowej harmonicznej fali, który przyjmuje postać:

$$\phi(t) = \frac{\omega}{k} r_0 e^{kz} \sin(kx - \omega t).$$



Założenie
Niewielkie odkształcenie swobodnej powierzchni.

Falowanie morskie – ruch cząstki wokół średniego położenia

W modelu ruchu orbitalnego położenie cząstki definiujemy jako ruch wokół średniego położenia:

$$x(t) = x_0 - r_0 e^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t),$$
$$y(t) = y_0,$$
$$z(t) = z_0 + r_0 e^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t),$$

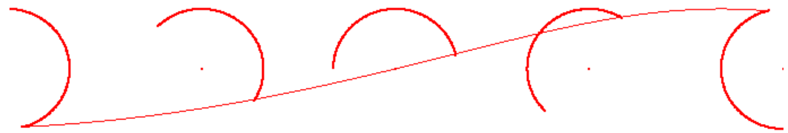
gdzie

(x_0, z_0)	jest średnim położeniem cząstki cieczy,
r_0	jest amplitudą składowej harmonicznej fali nieregularnej,
k	jest liczbą falową,
ω	jest częstością falowania.

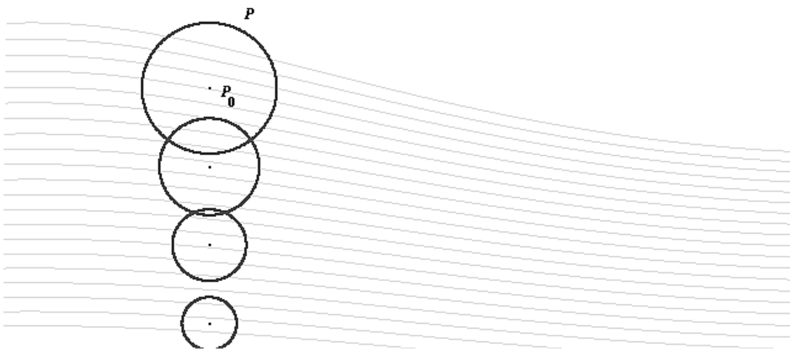
Falowanie morskie – ruch cząstki wokół średniego położenia

W ruchu orbitalnym cząstki poruszające się wokół średniego położenia, dla którego z_0=0, tworzą swobodną powierzchnię.

Zbiór cząstek cieczy tworzących swobodną powierzchnię nie zmienia się w czasie.



Rysunek obok przedstawia ruch orbitalny wokół punktów o różnych wartościach z_0, x_0=const..



Falowanie morskie – porównanie modeli fali grawitacyjnej

Swobodna powierzchnia ζ

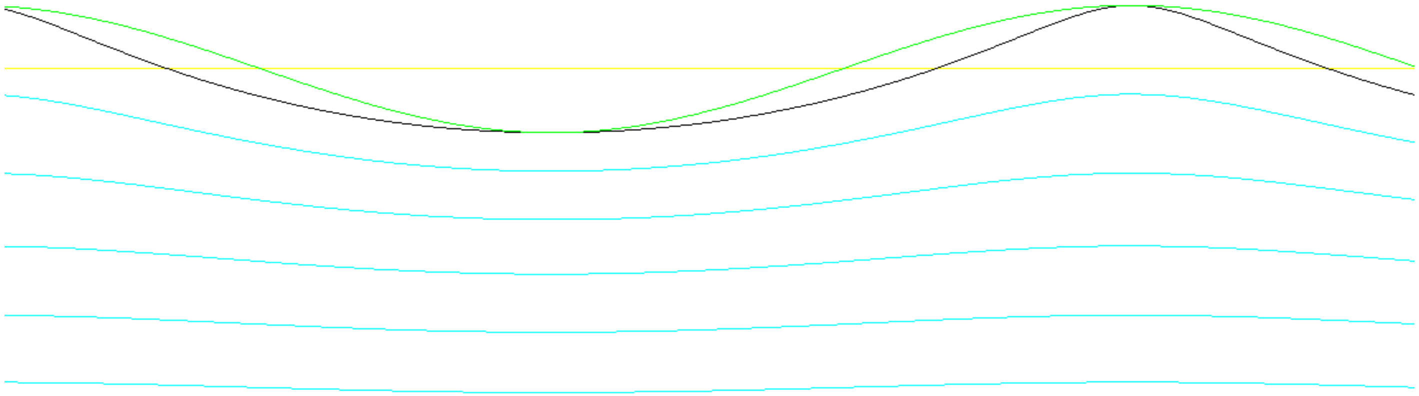
dla zagadnienia liniowego

$$x = x_0$$
$$\zeta = r_0 \cos(kx - \omega t)$$

Swobodna powierzchnia ζ_0

dla ruchu orbitalnego

$$x = x_0 - r_0 \sin(kx_0 - \omega t)$$
$$\zeta_0 = r_0 \cos(kx_0 - \omega t)$$



Falowanie morskie – porównanie modeli fali grawitacyjnej

Pole prędkości

dla zagadnienia liniowego

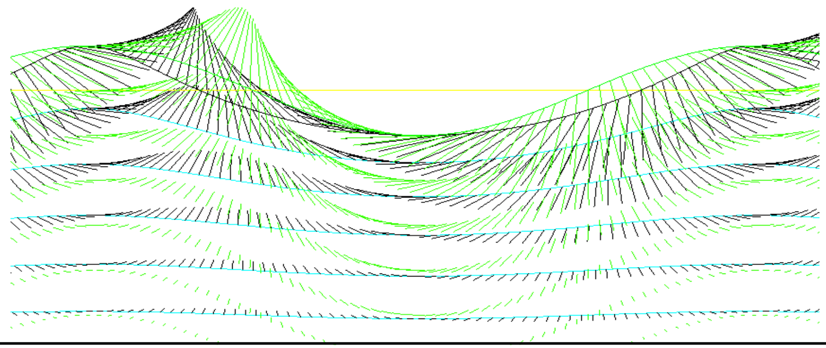
Pole prędkości

dla ruchu orbitalnego

$$\mathbf{v}(t) = \left(u_x(t), u_y(t), u_z(t)\right)$$

$$u_x(t) = \omega r_0 e^{kz} \cos(kx - \omega t + \varepsilon),$$
$$u_y(t) = 0,$$
$$u_z(t) = \omega r_0 e^{kz} \sin(kx - \omega t + \varepsilon).$$

$$u_x(t) = \omega r_0 e^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t + \varepsilon),$$
$$u_y(t) = 0,$$
$$u_z(t) = \omega r_0 e^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t + \varepsilon).$$



30

Falowanie morskie – porównanie modeli fali grawitacyjnej

W ruchu orbitalnym ciśnienie jest stałe dla punktów poruszających się wokół tego samego z_0, stąd otrzymujemy:

$$p(x,y,z)-p_a=\int_0^{z_0}\frac{\partial p}{\partial z_0}dz_0.$$

Po wykonaniu odpowiednich przekształceń równań ruchu, otrzymujemy wzór na pole ciśnienia dla ruchu orbitalnego:

$$p(x,y,z)-p_a=-\rho g\left(z_0+\frac{kr_0^2}{2}-\frac{kr_0^2}{2}e^{2kz_0}\right).$$

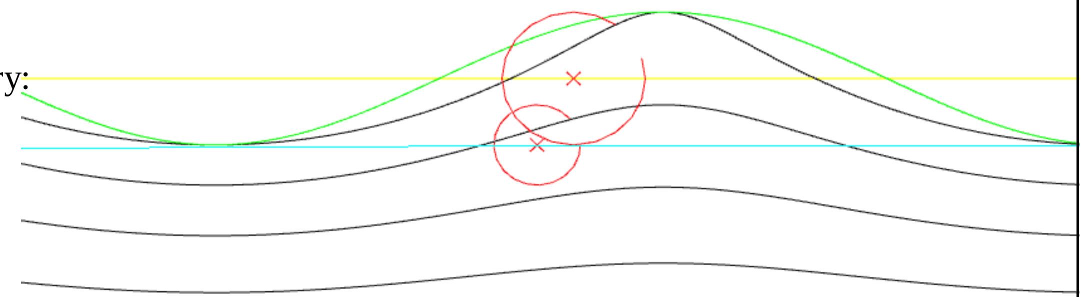
Powyższe równanie definiuje pewne przybliżenie wartości ciśnienia (dla niewielkich wartości r_0):

$$p(x,y,z)-p_a\cong-\rho g z_0.$$

Falowanie morskie – porównanie modeli fali grawitacyjnej

W stosowanym modelu ruchu orbitalnego największym problemem jest wyznaczenie wartości średniego położenia cząstki (x_0,z_0) przy zadanej wartości (x,z).

Odchylenia swobodnej powierzchni określają wzory:



$$\zeta = r_0 \cos(kx - \omega t),$$
$$\zeta_0 = r_0 \cos(kx_0 - \omega t).$$

Wiedząc, że w ruchu orbitalnym

$$z(t) = z_0 + r_0 e^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t),$$

otrzymujemy:

$$z_0 = z(t) - \zeta_0 e^{kz_0}.$$

Przybliżona wartość z_0 otrzymywana jest ze wzoru:

$$z_0 \cong z - \zeta e^{kz},$$

lub ze wzoru:

$$z_0 \cong z - \zeta e^{k(z-\zeta)}.$$

Falowanie morskie – porównanie modeli fali grawitacyjnej

Pole ciśnień dla ruchu orbitalnego obliczane jest ze wzorów:

$$p_{III} = p_a - \rho g\left(z_0 + 0.5kr_0^2\left(1 - e^{2kz_0}\right)\right),$$

$$p_{IV} = p_a - \rho g z_0 \approx p_{III},$$

Pole ciśnień dla teorii liniowej obliczane jest ze wzorów:

$$p_I = p_a - \rho g\left(z - \zeta e^{kz}\right),$$

$$p_{II} = p_a - \rho g\left(z - \zeta e^{k(z-\zeta)}\right).$$

Gdzie p_0 jest to ciśnienie na swobodnej powierzchni, (x_0, y_0, z_0) jest średnim położeniem cząstki cieczy.

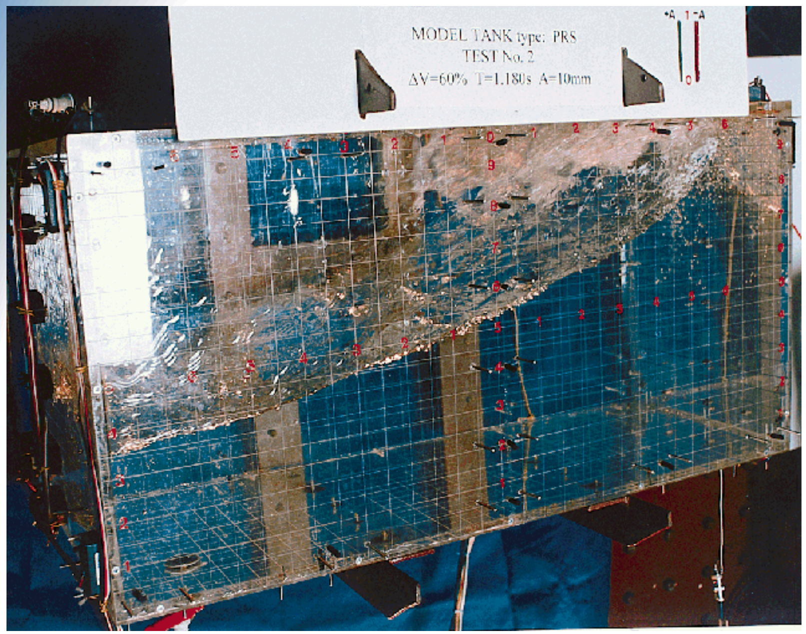
$$z_0 = z(t) - \zeta_0 e^{kz_0}$$

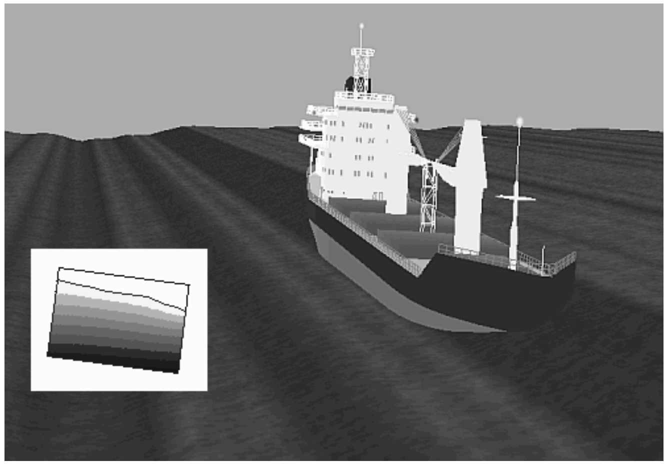
$$\zeta_0 = r_0 \cos\left(kx_0 - \omega t\right)$$

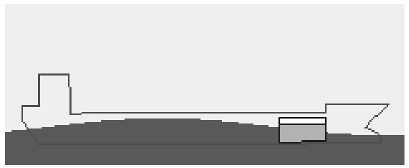
$$\zeta = r_0 \cos\left(kx - \omega t\right)$$

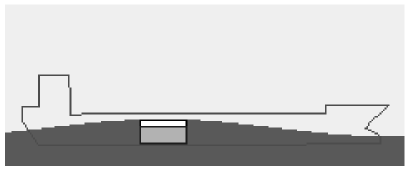
Polski Rejestr Statków

Ruch cieczy w zbiorniku okrętowym





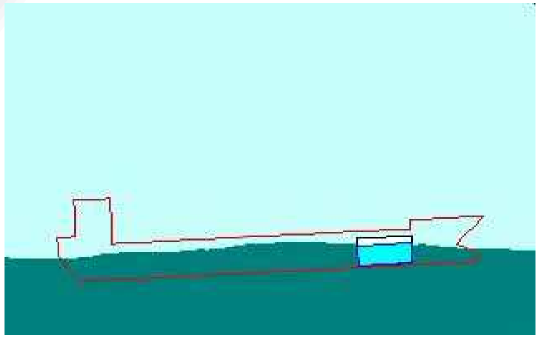


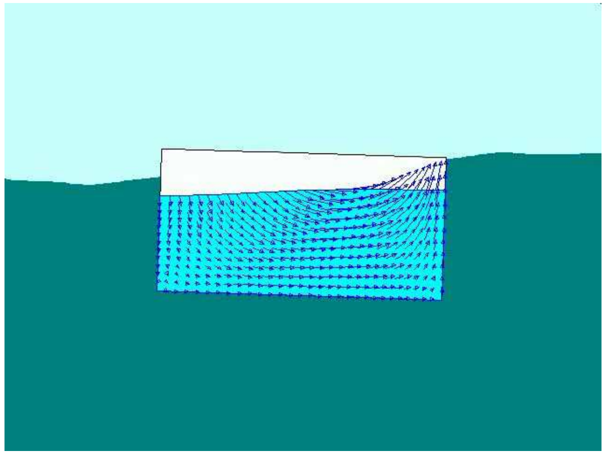


Polski Rejestr Statków

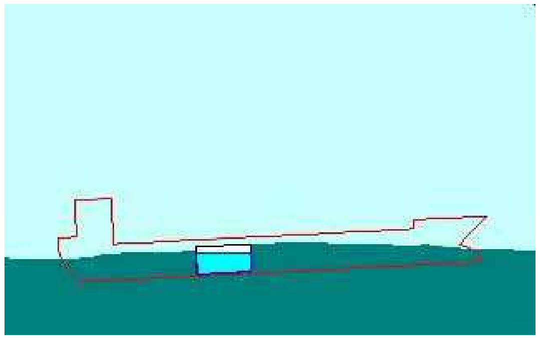
Ruch cieczy w zbiorniku okrętowym

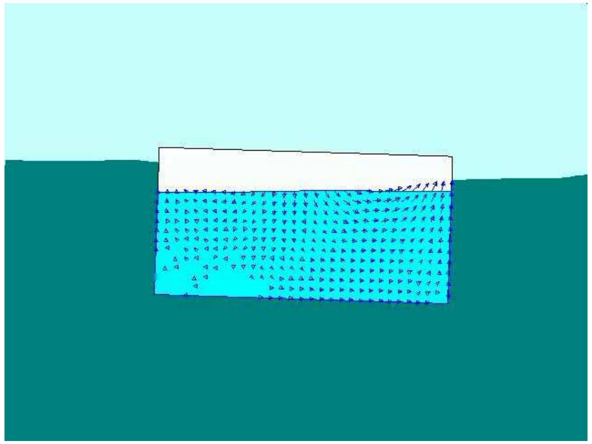
Ładownia nr 1





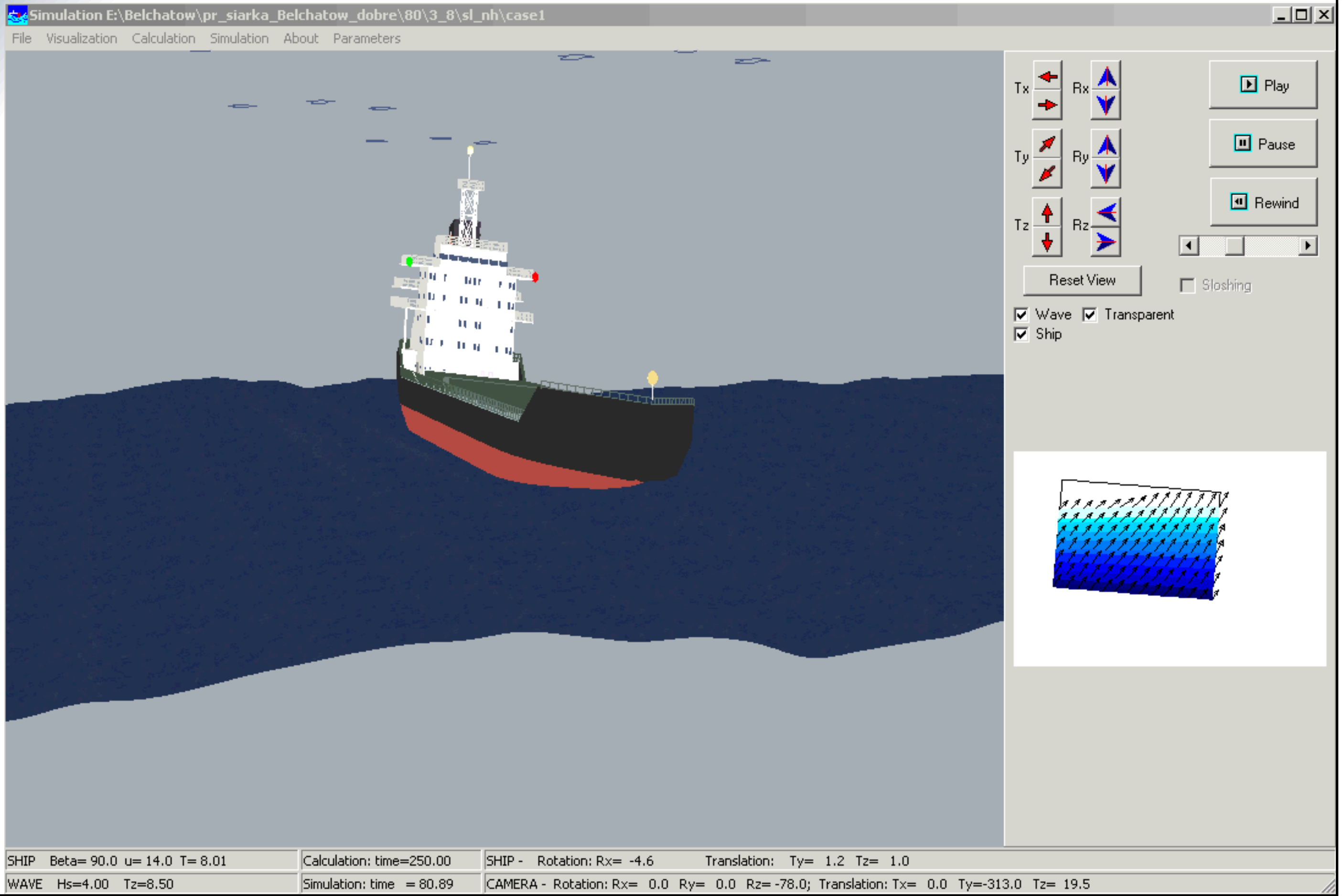
Ładownia nr 4





Polski Rejestr Statków

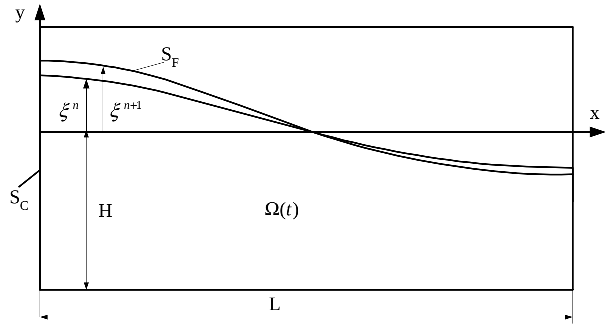
Ruch cieczy w zbiorniku okrętowym



Polski Rejestr Statków

Ruch cieczy w zbiorniku okrętowym – sformułowanie zagadnienie ruchu fali stojącej

Metoda elementów brzegowych – BOUNDARY ELEMENT METHOD



RÓWNANIE LAPLACE'A

$$\Delta\phi = 0 \qquad P \in \Omega,$$

WARUNKI BRZEGOWE

– Warunek na ścianie zbiornika S_C :

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = 0,$$

n – wektor normalny, skierowany do wnętrza cieczy,

Warunek kinematyczny na swobodnej powierzchni S_F :

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x},$$

– Warunek dynamiczny na swobodnej powierzchni S_F :

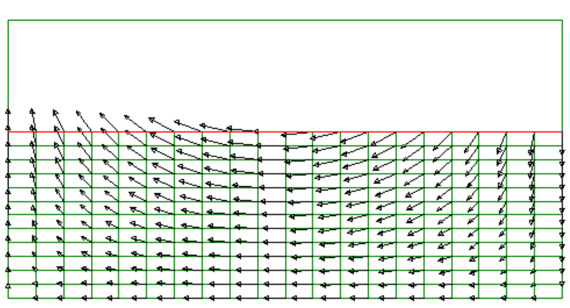
$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left|\nabla\phi\right|^2 + gz = c(t).$$

37

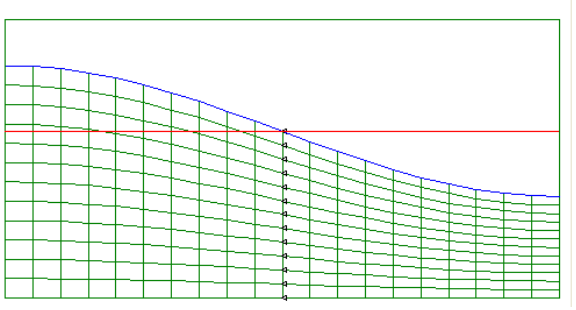
Ruch cieczy w zbiorniku okrętowym – sformułowanie zagadnienia ruchu fali stojącej

Kształt swobodnej powierzchni i pole prędkości w cyklu ruchu fali

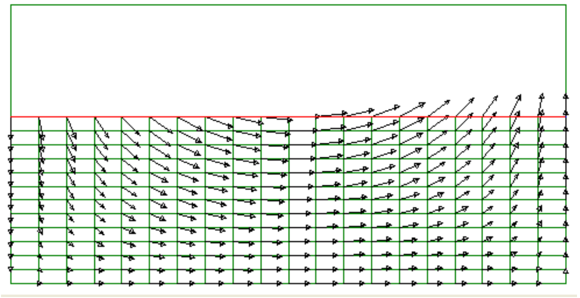
t=0s



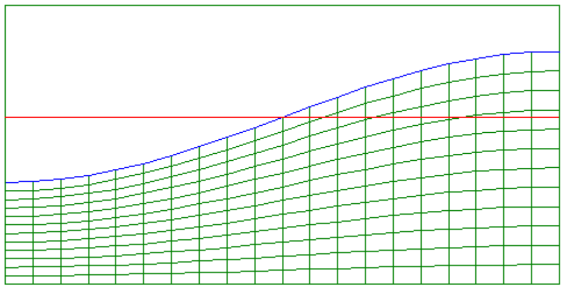
t=1/4T



t=1/2T

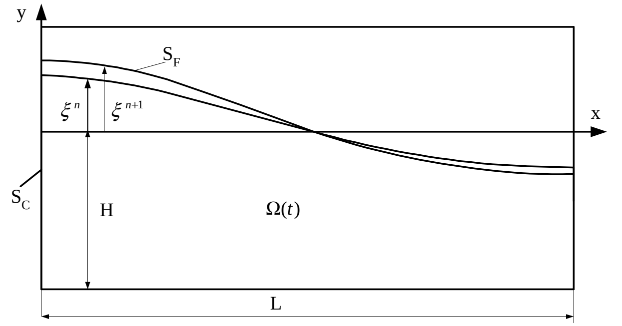


t=3/4T



Polski Rejestr Statków

Ruch cieczy w zbiorniku okrętowym – zagadnienie liniowe ruchu fali stojącej



BOUNDARY ELEMENT METHOD

RÓWNANIE LAPLACE'A

$$\Delta\phi = 0 \qquad P \in \Omega,$$

WARUNKI BRZEGOWE – zagadnienie liniowe :

– Warunek na ścianie S_C :

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = 0,$$

n – wektor normalny, skierowany do wnętrza cieczy,

– Warunek kinematyczny na swobodnej powierzchni S_F :

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial y},$$

– Warunek dynamiczny na swobodnej powierzchni S_F :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + gz = 0.$$

Ruch cieczy w zbiorniku okrętowym – zagadnienie liniowe ruchu fali stojącej

Rozwiązanie analityczne zagadnienia liniowego

Potencjał prędkości wyrażony jest wzorem:

$$\phi_S(x,y,t)=\frac{gr_0}{\omega}\frac{\cosh(k(y+H))}{\cosh(kH)}\cos(kx)\cos(\omega t).$$

Pole prędkości opisuje wzór:

$$\nabla\phi_S=(u_S,v_S)=\left(-\frac{gkr_0}{\omega}\frac{\cosh(k(y+H))}{\cosh(kH)}\sin(kx)\cos(\omega t),\quad \frac{gkr_0}{\omega}\frac{\sinh(k(y+H))}{\cosh(kH)}\cos(kx)\cos(\omega t)\right).$$

Odkształcenie swobodnej powierzchni

$$\zeta_S(x,t)=r_0\cos(kx)\sin(\omega t),\qquad y(t)=0,$$

otrzymywane jest ze wzoru: $\zeta_S=-\dfrac{1}{g}\dfrac{\partial\phi_S}{\partial t}$

gdzie spełniony jest warunek dyspersyjny: $\omega^2=gk\,\mathrm{tgh}(kH)$, $\quad k=\dfrac{\pi}{L}.$

L, H – długość, szerokość zbiornika,

r_0 – amplituda fali.

Polski Rejestr Statków

Ruch cieczy w zbiorniku okrętowym – rozwiązanie numeryczne zagadnienia nieliniowego ruchu cieczy w zbiorniku

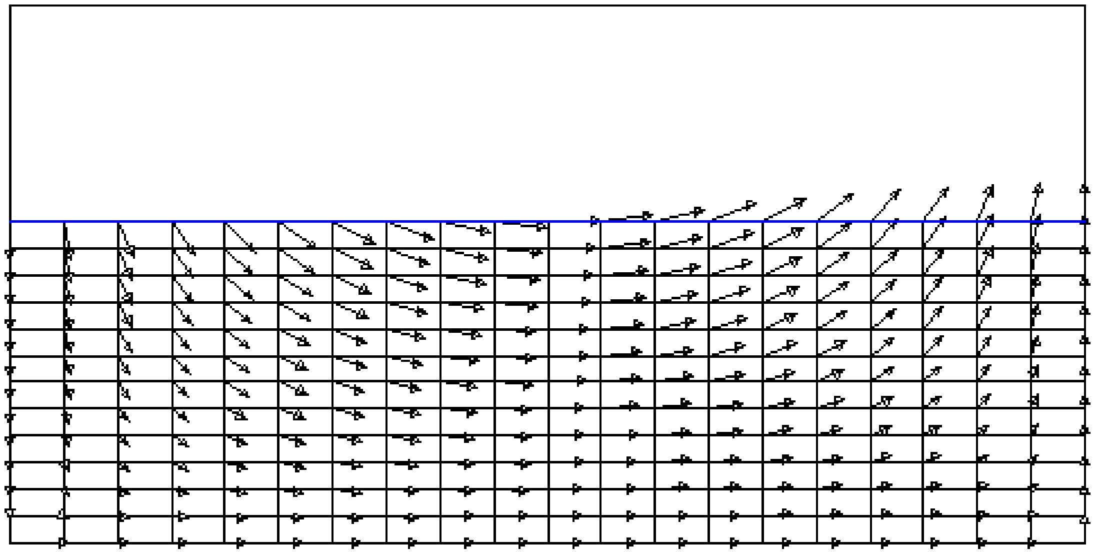
Warunki początkowe w chwili początkowej t=0

Powierzchnia swobodna jest niezakłócona:

$$\xi(x,0)=0 \qquad (x(t),y(t))\in S_F$$

Potencjał prędkości jest zdefiniowany wzorem:

$$\phi(x,y,0)=\frac{gr_0}{\omega}\frac{\cosh(k(y+H))}{\cosh(kH)}\cos(kx)$$

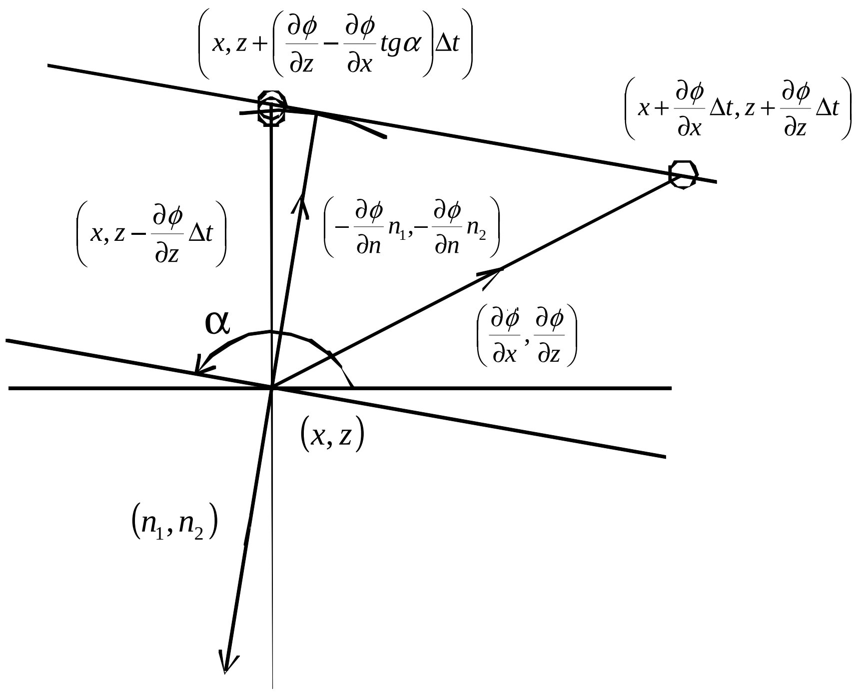


41

Polski Rejestr Statków

Ruch cieczy w zbiorniku okrętowym – rozwiązanie numeryczne zagadnienia nieliniowego ruchu cieczy zbiorniku

Metody określenia nowej swobodnej powierzchni



42

Polski Rejestr Statków

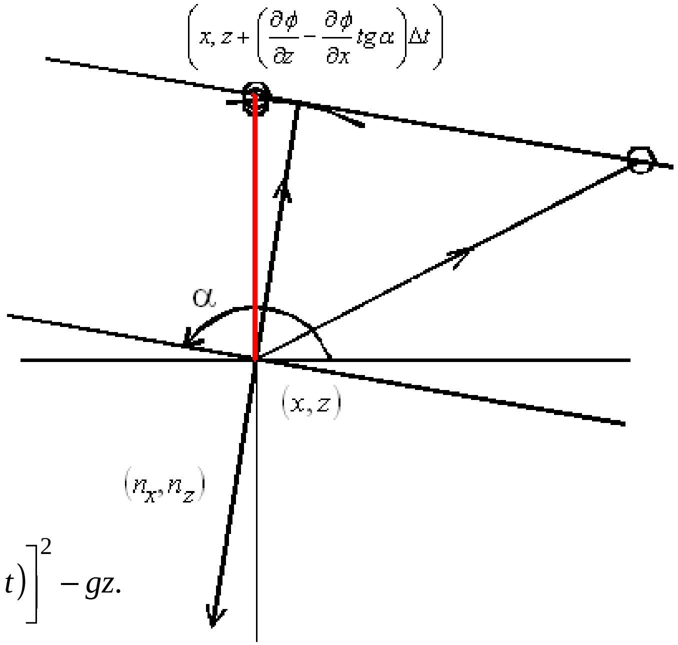
Ruch cieczy w zbiorniku okrętowym – rozwiązanie numeryczne zagadnienia nieliniowego ruchu cieczy zbiorniku

Metoda I

$$x_i(t) = x_i \qquad t \in (t^n, t^{n+1}]$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}(x_i,t) = \frac{\partial \phi}{\partial z}(x_i,\zeta(x_i,t),t) - tg(\alpha)\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_i,\zeta(x_i,t),t),$$

$$tg\alpha = -\frac{n_x}{n_z},$$

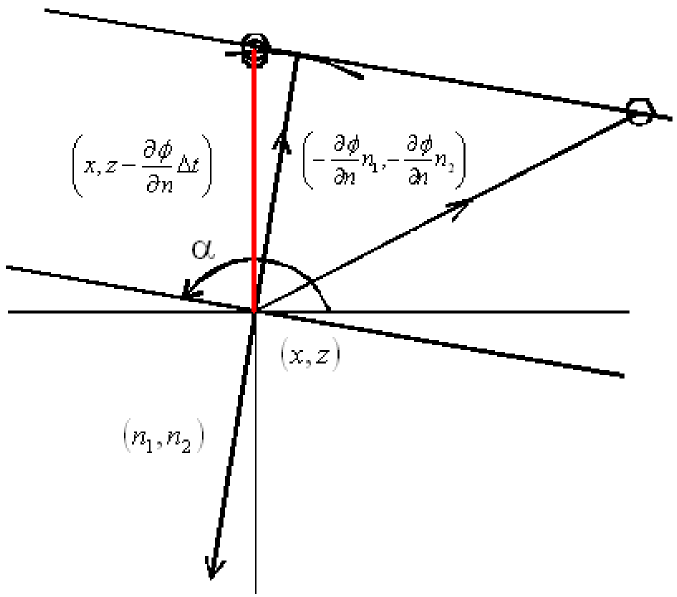


$$\frac{\bar{d}\phi}{dt}(x_i,\xi(x_i,t),t) = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\phi}{\partial x}(x_i,\zeta(x_i,t),t)\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\phi}{\partial z}(x_i,\xi(x_i,t),t)\right]^2 - gz.$$

43

Ruch cieczy w zbiorniku okrętowym – rozwiązanie numeryczne zagadnienia nieliniowego ruchu cieczy zbiorniku

Metoda II – dla α ≅ π



$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}(x_i(t),t)=-\frac{\partial\phi}{\partial n}(x_i,\zeta(x_i,t),t) \qquad t\in(t^n,t^{n+1}]$$
$$x_i(t)=x_i$$

$$\frac{d\phi}{dt}(x_i,\xi(x_i,t),t)=-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\phi}{\partial x}(x_i,\zeta(x_i,t),t)\right]^2+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\phi}{\partial z}(x_i,\xi(x_i,t),t)\right]^2-gz.$$

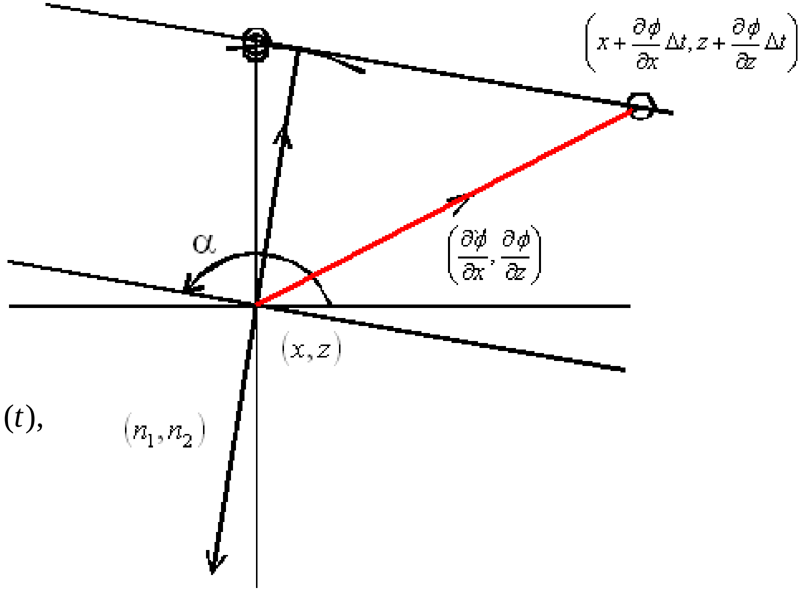
Ruch cieczy w zbiorniku okrętowym – rozwiązanie numeryczne zagadnienia nieliniowego ruchu cieczy zbiorniku

Metoda III

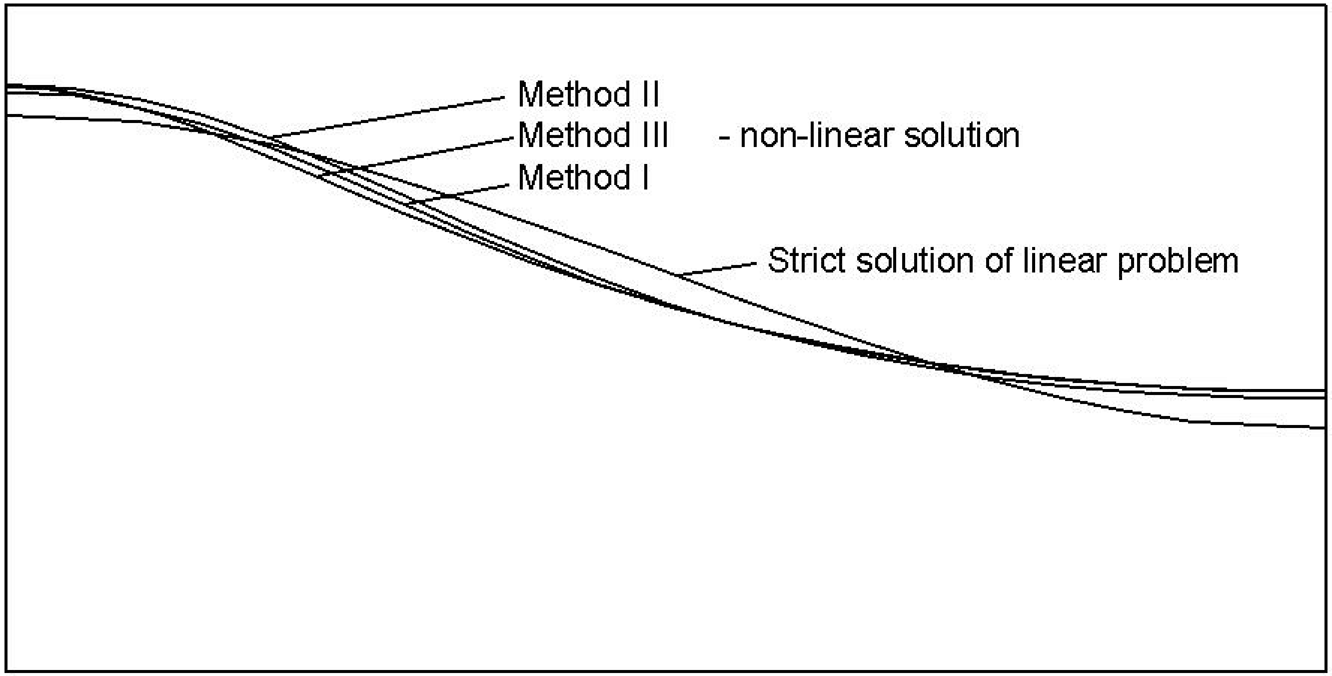
$$\frac{dx_i}{dt}(t) = \frac{\partial\phi}{\partial x}(x_i(t), z_i(t), t),$$

$$\frac{dz_i}{dt}(t) = \frac{\partial\phi}{\partial z}(x_i(t), z_i(t), t), \qquad t \in (t^n, t^{n+1}$$

$$\frac{d\phi}{dt}(x_i(t), z_i(t), t) = \frac{1}{2}\left|\nabla\phi(x_i(t), z_i(t), t)\right|^2 - g z_i(t),$$

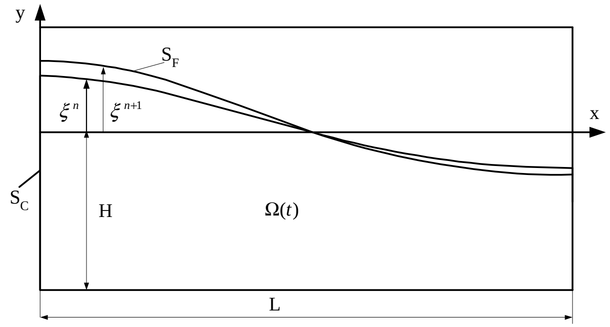


Ruch cieczy w zbiorniku okrętowym – rozwiązanie numeryczne zagadnienia nieliniowego ruchu cieczy zbiorniku



Ruch cieczy w zbiorniku okrętowym – rozwiązanie numeryczne zagadnienia nieliniowego ruchu cieczy zbiorniku

Metoda elementów brzegowych – BOUNDARY ELEMENT METHOD



RÓWNANIE LAPLACE'A

$$\Delta\phi = 0 \qquad P \in \Omega,$$

WARUNKI BRZEGOWE

– Warunek na ścianie zbiornika S_C :

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = \mathbf{u_e},$$

n – wektor normalny, skierowany do wnętrza cieczy,

– Warunek kinematyczny na swobodnej powierzchni S_F :

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x},$$

– Warunek dynamiczny na swobodnej powierzchni S_F :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left|\nabla\phi\right|^2 + gz = c(t).$$

Ruch cieczy w zbiorniku okrętowym – rozwiązanie numeryczne zagadnienia nieliniowego ruchu cieczy zbiorniku

I. Przesunięcie swobodnej powierzchni
i określenie nowych współrzędnych siatki

$$\left(x_i^n, y_j^n\right)\left(t^n\right) \xrightarrow{(u_x{}^n, u_y{}^n)} \left(x_i^{n+1}, y_j^{n+1}\right)\left(t^n\right)$$

II.Obliczenie wartości potencjału pola na swobodnej powierzchni

$$\phi(x_i^{n+1}, y_j^{n+1}, t^n) \longrightarrow \tilde{\phi}(x_i^{n+1}, y_j^{n+1}, t^{n+1})$$

III. Obliczenie potencjału spełniającego warunki brzegowe i zasadę zachowania masy dla
całego obszaru

$$\tilde{\phi}(x_i^{n+1}, y_j^{n+1}, t^{n+1}) \xrightarrow{\Delta\phi=0} \phi(x_i^{n+1}, y_j^{n+1}, t^{n+1})$$

Ruch cieczy w zbiorniku okrętowym – rozwiązanie numeryczne zagadnienia nieliniowego ruchu cieczy zbiorniku

Etap I.i Etap II. Przesunięcie swobodnej powierzchni i obliczenie wartości potencjału pola na swobodnej powierzchni opisują wcześniej opisane metody I, II i III.

Do numerycznego obliczenia nowego położenie swobodnej powierzchni i wartości potencjału stosujemy metodę Heunego trzeciego stopnia.

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x_i^{n+1}, y_j^{n+1}, t^{n+1}) = H(x_i^{n+1}, y_j^{n+1}, t^{n+1}, f^{n+1})$$

$$t^{n+1} = t^n + \Delta t$$

$$f(x_i^{n+1}, y_j^{n+1}, t^{n+1}) = f(x_i^n, y_j^n, t^n) + \frac{1}{3}(k_1 + 2k_3)$$

$$k_{1f} = H(x_i^n, y_j^n, t^n, f^n)$$

$$k_{2f} = H(x_i^n + k_{1x}\frac{\Delta t}{2}, y_j^n + k_{1y}\frac{\Delta t}{2}, t^n + \frac{\Delta t}{2}, f^n + \frac{\Delta t}{2})$$

$$k_{3f} = H(x_i^n + k_{2x}\frac{2\Delta t}{3}, y_j^n + k_{2y}\frac{2\Delta t}{3}, t^n + \frac{2\Delta t}{3}, f^n + k_{2f}\frac{2\Delta t}{3})$$

Etap III. Obliczenie potencjału spełniającego warunki brzegowe i zasadę zachowania masy dla całego obszaru

$$\tilde{\phi}(x_i^{n+1}, y_j^{n+1}, t^{n+1}) \xrightarrow{\Delta\phi=0} \phi(x_i^{n+1}, y_j^{n+1}, t^{n+1})$$

Potencjał ϕ spełnia zagadnienie Laplace'a **:**

$$\Delta\phi = 0 \qquad (x,y) \in \Omega^{n+1}$$

$$\phi = \tilde{\phi} \qquad (x,y) \in S_F^{\,n+1}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = u_e \qquad (x,y) \in S_C^{\,n+1}$$

Ruch cieczy w zbiorniku okrętowym – rozwiązanie numeryczne zagadnienia nieliniowego ruchu cieczy zbiorniku

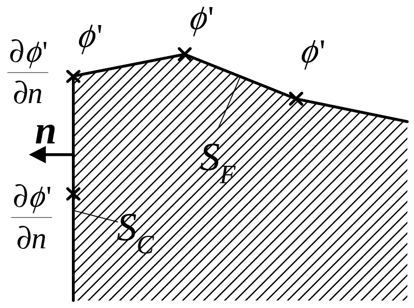
Etap III. Obliczenie potencjału spełniającego warunki brzegowe i zasadę zachowania masy dla całego obszaru

Układ równań Fredholma 2 stopnia jest postaci:

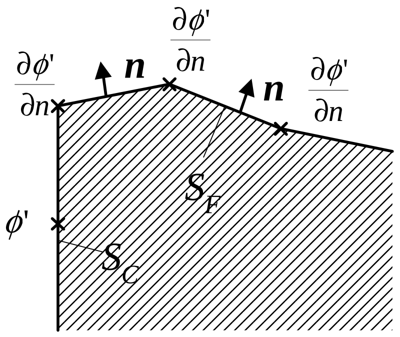
$$\mu(X_k)\phi'(X_k) = -\int_{Y\in S} \phi'(Y)\frac{\partial \ln|X_k\text{-}Y|}{\partial n_y}dl + \int_{Y\in S}\frac{\partial\phi'(Y)}{\partial n_y}\ln|X_k\text{-}Y|dl,\quad X_k\in S,\ k=1..m, Y\in S=\bigcup_{l=1..m}[\mathbf{X}_l,\mathbf{X}_{l+1}]$$

gdzie

a) wartości zadane



b) wartości poszukiwane



Ruch cieczy w zbiorniku okrętowym – rozwiązanie numeryczne zagadnienia nieliniowego ruchu cieczy zbiorniku

Etap III. Obliczenie potencjału spełniającego warunki brzegowe i zasadę zachowania masy dla całego obszaru

Zadane na brzegu *S* wartości potencjału i jego pochodnych normalnych pozwalają na obliczenia potencjału dla dowolnego punktu obszaru Ω:

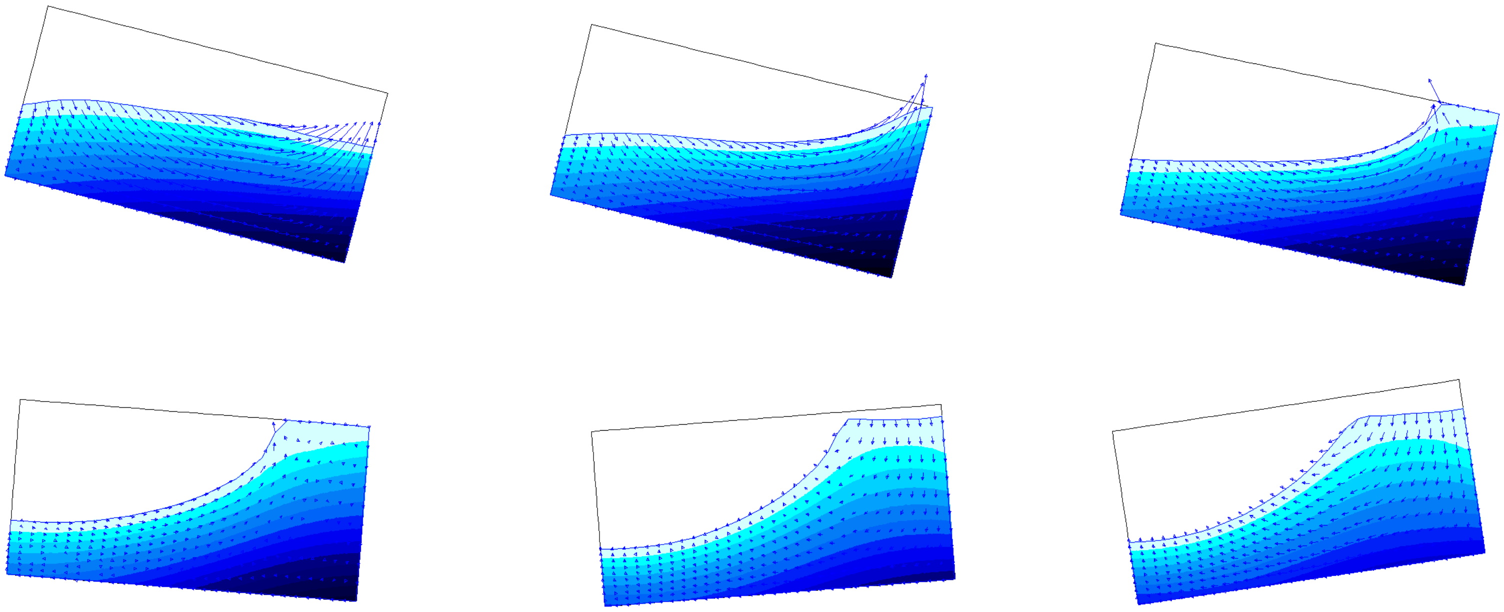
$$2\pi\phi'(X) = -\int_{Y\in S} \phi'(Y)\frac{\partial \ln|X\text{-}Y|}{\partial n_y}dl + \int_{Y\in S}\frac{\partial\phi'(Y)}{\partial n_y}\ln|X\text{-}Y|dl, \qquad X\in\Omega\setminus S,\;\; Y\in S=\bigcup_{l=1..m}[\mathbf{X}_l,\mathbf{X}_{l+1}]$$

Literatura:
Warmowska M.: Określenie parametrów ruchu cieczy w zbiorniku okrętowym z uwzględnieniem zjawisk nieliniowych, praca doktorska, Politechnika Gdańsk, Gdansk, 2006 r.
Warmowska M.: Numerical simulation of liquid motion in partly filled tank, Opuscula Mathematica, Vol. 26/3, Kraków 2006 r.

Polski Rejestr Statków

Ruch cieczy w zbiorniku okrętowym – rozwiązanie numeryczne zagadnienia nieliniowego ruchu cieczy zbiorniku

L=0.8[m] R=0.4[m], H=0.24[m] (zbiornik wypełniony w 60%)
$A_{\omega'}$=14.4[°], ω=0.91 [rad/s] (T=6.85[s])



53

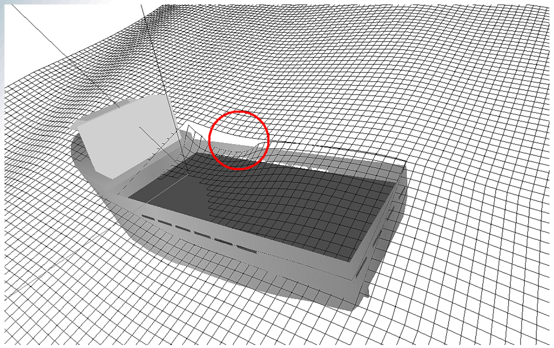
Woda na pokładzie

Modelowanie zjawiska wody na pokładzie można podzielić na etapy:

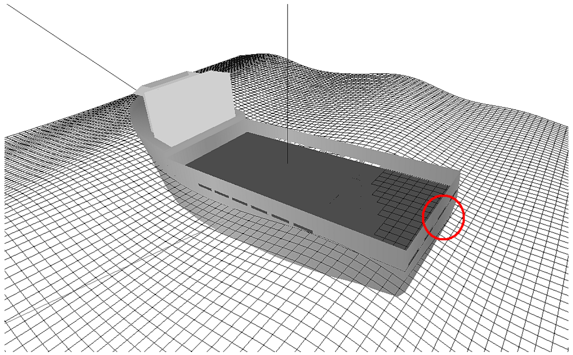
- wtargnięcie wody ponad burtami statku,
- przepływ wody zaburtowej na pokład statku)pokład zanurzony w wodzie),
- swobodny, dynamiczny przepływ wody wzdłuż pokładu,
- ruch wody przez otwory w burcie i ponad burtą statku.

Woda na pokładzie

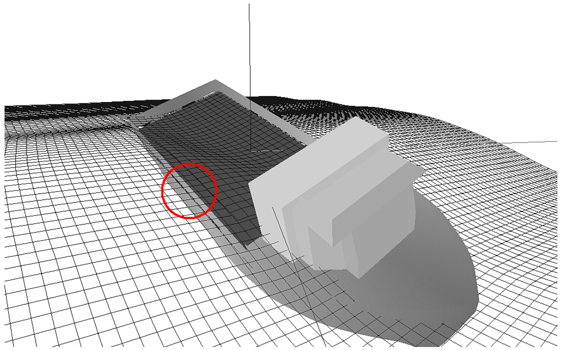
Przepływ ponad burtą



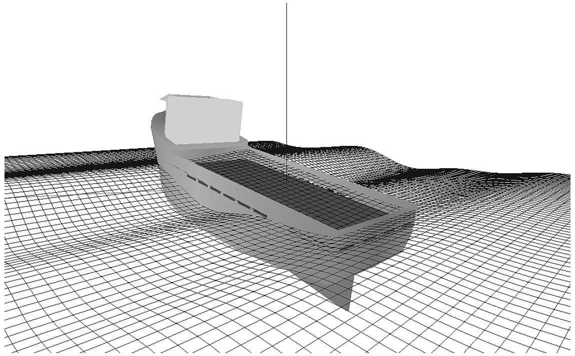
Przepływ przez otwory w burcie



Pokład zanurzony w wodzie



Swobodny, dynamiczny ruch wody wzdłuż pokładu statku



Woda na pokładzie – sformułowanie zagadnienia

Ruch wody wzdłuż podkładu statku można opisać równaniami Eulera:

$$\frac{du_x}{dt}(t, x(t), y(t), z(t)) = f_x(t, x(t), y(t), z(t)) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}(t, x(t), y(t), z(t)),$$

$$\frac{du_y}{dt}(t, x(t), y(t), z(t)) = f_y(t, x(t), y(t), z(t)) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}(t, x(t), y(t), z(t)),$$

$$\frac{du_z}{dt}(t, x(t), y(t), z(t)) = f_z(t, x(t), y(t), z(t)) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}(t, x(t), y(t), z(t)),$$

gdzie

p jest ciśnieniem w punkcie (x, y, z),

(f_x, f_y, f_z) to składowe sił zewnętrznych (siły ciężkości i sił wywołanych ruchem statku),

ρ jest gęstością wody.

Woda na pokładzie – sformułowanie zagadnienia

Równanie zachowania masy dla wody o stałej gęstości przyjmuje postać:

$$\nabla \cdot \left(u_x(t, x(t), y(t), z(t)), u_y(t, x(t), y(t), z(t)), u_z(t, x(t), y(t), z(t))\right) = q(t, x(t), y(t), z_d(t)),$$

gdzie

q odpowiada za zmianę masy wody ,

q zmienia się w czasie i wynika:

• z przepływu przez otwory w burcie statku,

• przepływ wody (wypływ) ponad burtami statku.

Woda na pokładzie – sformułowanie zagadnienia

Założenia

• niewielkie zmiany w czasie pionowej składowej u_z,

$$\frac{du_z}{dt}(t, x(t), y(t), z(t)) \approx 0$$

• wartości składowych poziomych prędkości u_x i u_y nie zależą od zmiennej z.

$$u_x(t, x(t), y(t), z(t)) = u_x(t, x(t), y(t))$$
$$u_y(t, x(t), y(t), z(t)) = u_y(t, x(t), y(t)) \qquad (x(t), y(t), z(t)) \in \Omega(t)$$

Woda na pokładzie – metoda wody płytkiej

Algorytm

Problem wody płytkiej rozwiązywany jest w czterech krokach,

Polega na wyznaczeniu:

1. obszaru Ω zajmowanego przez ciecz,
2. pola ciśnień,
3. składowych horyzontalnych u_x, u_y,
4. składowej wertykalnej u_z.

Woda na pokładzie – metoda wody płytkiej

1. Położenie swobodnej powierzchni S_F jest określone następującymi równaniami, wynikającymi z definicji prędkości:

$$\frac{dx}{dt}(t) = u_x(t, x(t), y(t)),$$
$$\frac{dy}{dt}(t) = u_y(t, x(t), y(t)), \qquad (x(t), y(t), z(t)) \in S_F(t)$$
$$\frac{dz}{dt}(t) = u_z(t, x(t), y(t), z(t)).$$

2. Ciśnienie na pokładzie, wywołane obecnością wody, można otrzymać po scałkowaniu trzeciego równania Eulera:

$$p_d(t, x, y, z_d) \cong p_a + \rho \int_{z_d + h(t,x,y,z_d)}^{z_d} f_z(t, x, y, s)\, ds, \quad (x(t), y(t), z_d(t)) \in \Omega(t).$$

gdzie (x,y,z_d) to współrzędne położenia cząstek wody na pokładzie,

$h(t,x,y,z_d)$ jest wysokością słupa wody ponad punktem pokładu (x,y,z_d),

p_a jest ciśnieniem na swobodnej powierzchni.

Woda na pokładzie – metoda wody płytkiej

3. Składowe horyzontalne wektora prędkości wody zostaną wyznaczone z dwóch pozostałych równań ruchu:

$$\frac{du_x}{dt}(t,x(t),y(t),z(t)) = f_x(t,x(t),y(t),z(t)) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}(t,x(t),y(t),z(t)),$$

$$\frac{du_y}{dt}(t,x(t),y(t),z(t)) = f_y(t,x(t),y(t),z(t)) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}(t,x(t),y(t),z(t)),$$

$$(x(t),y(t),z(t)) \in S_F(t).$$

4. Z równania zachowania masy otrzymywana jest wertykalna składowa prędkości u_z :

$$u_z(t,x(t),y(t),z(t)) = \left(-\frac{\partial u_x}{\partial x}(t,x(t),y(t)) - \frac{\partial u_y}{\partial y}(t,x(t),y(t)) + q\right)(z(t) - z_d(t))$$

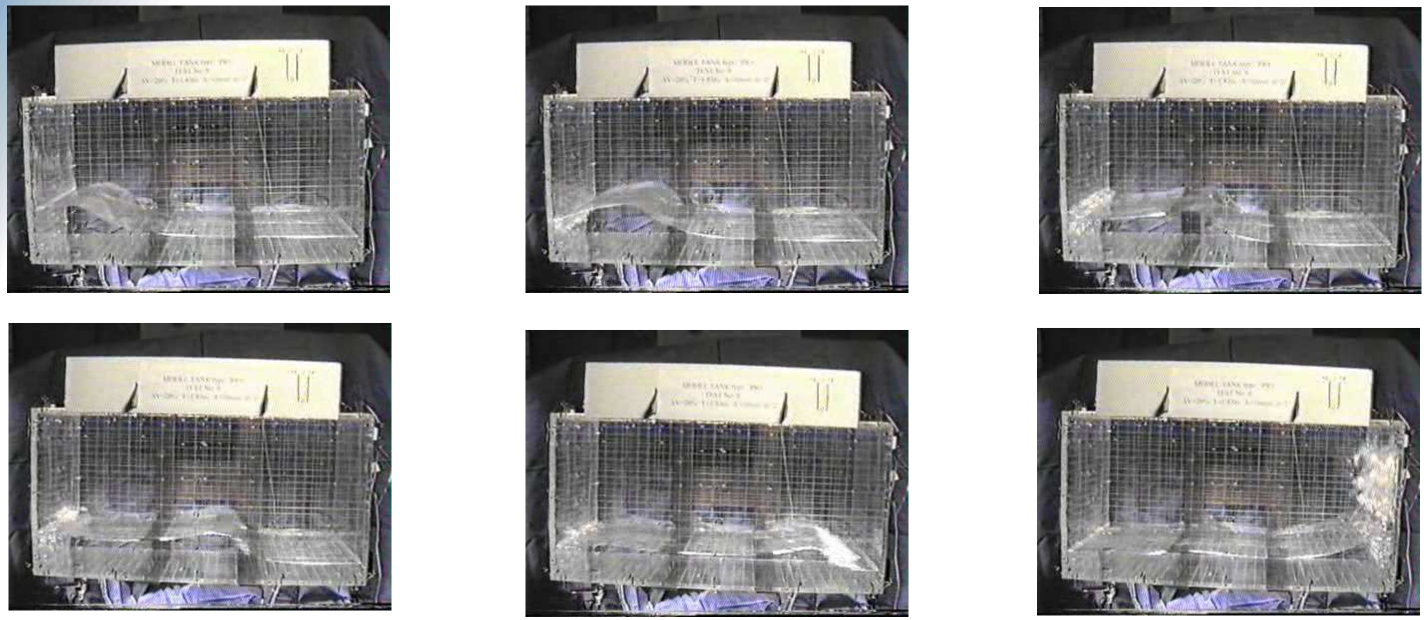
gdzie

q odpowiada za zmianę masy,

(x,y,z_d) to współrzędne punktów wody na pokładzie statku.

Woda na pokładzie – metoda wody płytkiej

Zjawisko sloshingu w zbiorniku wypełnionym poniżej 30%

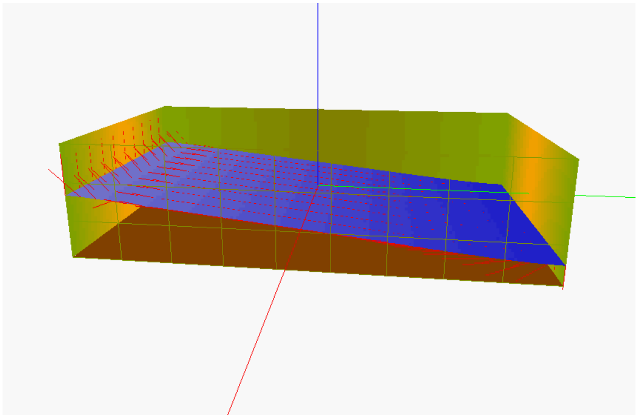


Założenia
• niewielkie zmiany w czasie pionowej składowej u_z,
• wartości składowych poziomych u_x i u_y prędkości nie zależą od zmiennej z.

Polski Rejestr Statków

Woda na pokładzie – metoda wody płytkiej

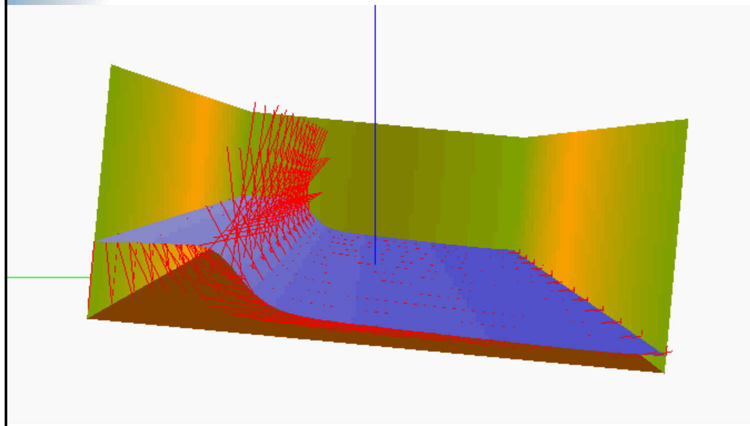
Symulacja ruchu zbiornika (ruch poziomy z stałym przyspieszeniem a_x=1m/s^2).

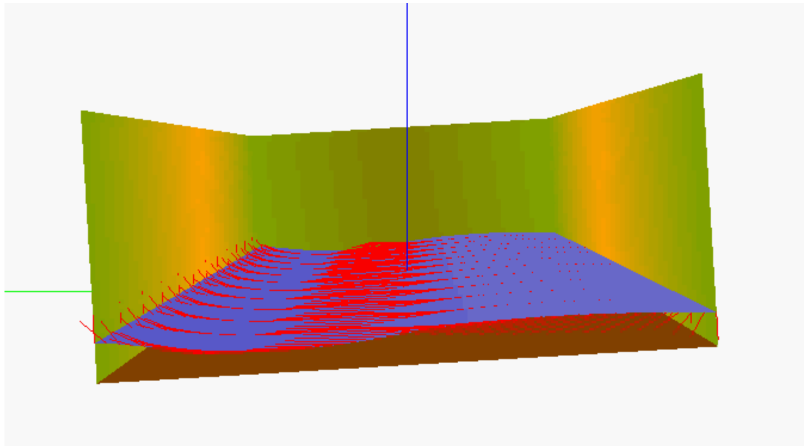


Po pewnym czasie swobodna powierzchnia osiąga nachylenie α= –5,82°
(tg(α)= –1/9,81).

Woda na pokładzie – metoda wody płytkiej

Symulacja ruchu cieczy w zbiorniku poruszającym się dla różnych częstości kołysania.

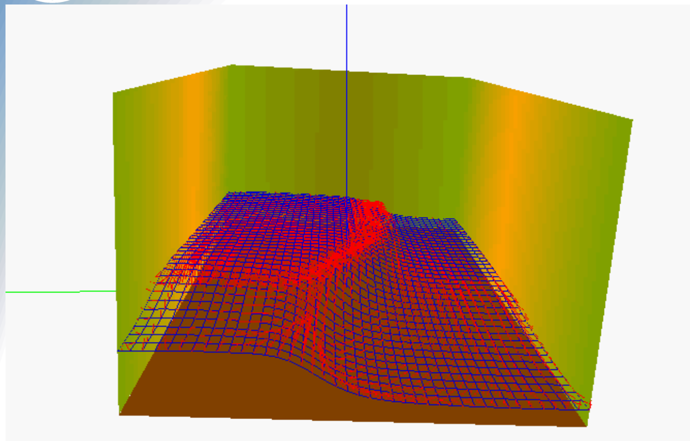




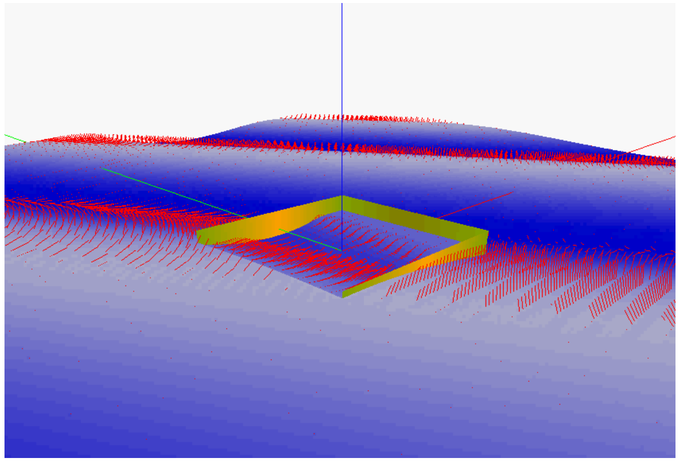
Obserwowana jest fala przesuwająca się wzdłuż dna.

Fala złożona jest z dwóch fal: nabiegającej i odbitej.

Woda na pokładzie – metoda wody płytkiej



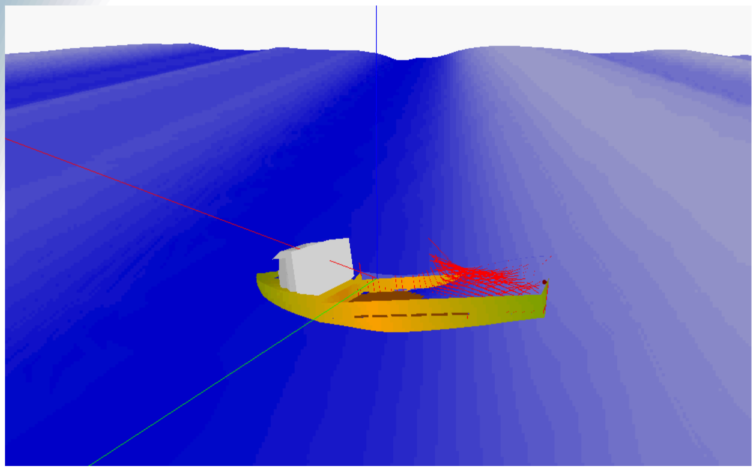
Symulacja 3D ruchu cieczy
w zbiorniku wykonującym złożony
ruch kołysania i kiwania.



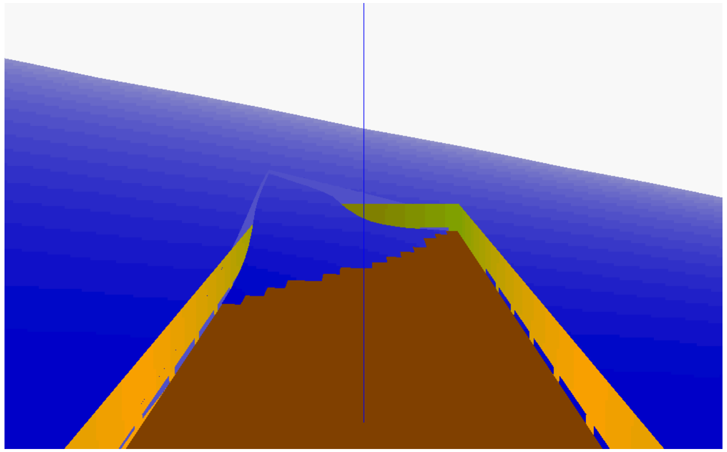
Symulacja dla pokładu pozostającego w spoczynku.
Zewnętrzna woda wpływa na pokład i swobodnie
porusza się wzdłuż pokładu.
Parametry fali zewnętrznej: T_z=6s, H_s=4m, β = 30°.

Woda na pokładzie – metoda wody płytkiej

Statek porusza się swobodnie na fali o parametrach: T_z=8s, H_s=6m, β = 30°.



Układ globalny



Układ lokalny