DYNAMIKA PRZEKSZTAŁCENIA NASHA DLA GIER DWUOSOBOWYCH Z DWIEMA STRATEGIAMI CZYSTYMI

MICHAŁ MISIUREWICZ

Indiana University-Purdue University Indianapolis

Wykład ten jest w większości oparty na pracach:

R. A. Becker, S. K. Chakrabarti, W. Geller, B. Kitchens i M. Misiurewicz, *Dynamics of the Nash Map in the game of Matching Pennies*, J. Difference Equ. Appl. **13** (2007), 223 - 235.

W. Geller, B. Kitchens i M. Misiurewicz, *Microdynamics for Nash maps*, Discrete Contin. Dynam. Sys. **27** (2010), 1007 - 1024.

R. A. Becker, S. K. Chakrabarti, W. Geller, B. Kitchens i M. Misiurewicz, *Hyperbolic dynamics in Nash maps*, w: Discrete Dynamics and Difference Equations, World Scientific, Singapore 2010, strony 15 - 45.

R. A. Becker, S. K. Chakrabarti, W. Geller, B. Kitchens i M. Misiurewicz, *The dynamics of the Nash map for 2 by 2 games*, w: Dynamics, Games and Science II, Springer Proceedings in Mathematics, 2011, Volume 2, strony 549 - 565.

W ekonomii jednym z podstawowych narzędzi jest **teoria gier**. Zajmijmy się najprostszym przypadkiem gier skończonych. Mamy do czynienia ze skończoną liczbą **graczy**. Graczem niekoniecznie musi być pojedyncza osoba. Może to być na przykład grupa osób, przedsiębiorstwo, itp. Każdy z graczy ma do wyboru skończony zbiór **strategii czystych**. Wybór odbywa się równocześnie dla wszystkich graczy. W zależności od tego wyboru, następuje **wypłata**. Wypłatę mierzymy w jednostkach umownych, które niekoniecznie muszą mieć związek z pieniędzmi. **Macierz wypłat** pokazuje jej wysokości dla wszystkich graczy.

Na przykład, załóżmy, że jest dwóch graczy. Jeden z nich ma do wyboru strategie czyste „góra” i „dół”, a drugi „lewo” i „prawo”. Przy kombinacji góra-lewo pierwszy gracz wygrywa 5 złotych a drugi przegrywa 3 złote, góra-prawo daje drugiemu graczowi 2 złote, a pierwszy traci 6, dół-lewo daje obu graczom wygraną po 4 złote, a przy dół-prawo oboje tracą po złotówce. Wtedy macierz wypłat wygląda tak:

strategia	lewo	prawo
góra	$(5, -3)$	$(-6, 2)$
dół	$(4, 4)$	$(-1, -1)$

Można ją oczywiście zapisać rezygnując z opisu strategii:

$$\begin{bmatrix} (5,-3) & (-6,2) \\ (4,4) & (-1,-1) \end{bmatrix},$$

lub jako dwie osobne macierze wypłat, dla pierwszego i dla drugiego gracza:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad R_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Gracze mogą również stosować **strategie mieszane**, to jest strategie czyste z odpowiednimi prawdopodobieństwami (oczywiście prawdopodobieństwa muszą sumować się do 1). Jedna z możliwych interpretacji strategii mieszanej to uznanie, że gracz jest grupą osób, a prawdopodobieństwo odpowiada stosunkowi liczby osób stosujących daną strategię czystą do liczby wszystkich osób w grupie.

Dla gry skończonej zawsze istnieje punkt **równowagi Nasha**. Jest to przyporządkowanie każdemu graczowi takiej strategii (mieszanej), że jeśli pozostali gracze nie zmienią swoich strategii, to dany gracz nie może przez zmianę swojej strategii uzyskać większej wypłaty.

Nash podał trzy dowody istnienia tego punktu równowagi. Jeden z nich wykorzystuje przekształcenie, które nazwiemy **przekształceniem Nasha** i które opiszemy za chwilę.

Często rozpatruje się **gry powtarzane** (iterowane). Przy każdym powtórzeniu (rundzie) gracze znają wynik poprzedniej rundy (lub wielu poprzednich rund) i biorą go pod uwagę. Najczęściej uważa się, że będą się oni starali zastosować strategię, która byłaby optymalna w poprzedniej rundzie, czyli tak zwaną **najlepszą odpowiedź** (best response). Przekształcenie Nasha daje możliwość bardziej konserwatywnej **lepszej odpowiedzi** (better response). Uwzględnia ona naturalną niechęć do całkowitej zmiany strategii przy każdym powtórzeniu. Dla każdej strategii czystej gracz porównuje wypłatę jaką by otrzymał stosując tę strategię z wypłatą otrzymaną naprawdę i jeśli różnica jest dodatnia, dodaje tę różnicę do poprzedniego prawdopodobieństwa zastosowania danej strategii czystej. Tak otrzymany wektor na ogół nie będzie probabilistyczny, więc trzeba go unormować i w ten sposób otrzymujemy strategię mieszaną na następną rundę.

Zapiszmy to wszystko wzorami, koncentrując się na najprostszym nietrywialnym przypadku dwóch graczy i dwóch strategii czystych.

Nazwijmy graczy X i Y i oznaczmy ich macierze wypłat odpowiednio R_X i R_Y. Jeśli gracz X zastosował pierwszą strategię z prawdopodobieństwem x, to prawdopodobieństwo użycia przez niego drugiej strategii jest $1 - x$. Wobec tego wektor opisujący jego strategię mieszaną jest $\mathbf{x} = (x, 1 - x)$. Podobnie, wektor opisujący strategię mieszaną gracza Y jest $\mathbf{y} = (y, 1 - y)$. Wówczas wartość oczekiwana wypłaty jest $\mathbf{x}R_X\mathbf{y}^T$ dla gracza X oraz $\mathbf{x}R_Y\mathbf{y}^T$ dla gracza Y (gdzie $\mathbf{y}^T$ oznacza wektor $\mathbf{y}$ transponowany, czyli zapisany jako kolumna).

Zgodnie z opisem lepszej odpowiedzi, w następnej rundzie wektory opisujące strategię mieszaną graczy X i Y będą odpowiednio

$$\left(\frac{t_x}{t_x + t_{1-x}}, \frac{t_{1-x}}{t_x + t_{1-x}}\right) \quad \text{i} \quad \left(\frac{t_y}{t_y + t_{1-y}}, \frac{t_{1-y}}{t_y + t_{1-y}}\right),$$

gdzie

$$\begin{aligned}
t_x &= \quad x \quad &+& \quad \max\{0, (\mathbf{e}_1 - \mathbf{x})R_X \mathbf{y}^T\}, \\
t_{1-x} &= (1-x) &+& \quad \max\{0, (\mathbf{e}_2 - \mathbf{x})R_X \mathbf{y}^T\}, \\
t_y &= \quad y \quad &+& \quad \max\{0, \mathbf{x}R_Y(\mathbf{e}_1 - \mathbf{y})^T\}, \\
t_{1-y} &= (1-y) &+& \quad \max\{0, \mathbf{x}R_Y(\mathbf{e}_2 - \mathbf{y})^T\},
\end{aligned}$$

zaś $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ i $\mathbf{e}_2 = (0,1)$.

Ponieważ dla wektora probabilistycznego w wymiarze 2 jego druga współrzędna jest wyznaczona jednoznacznie przez pierwszą, cała informacja o przekształceniu Nasha jest zawarta w **istotnym przekształceniu Nasha** $n = (n_1, n_2) : [0,1]^2 \to [0,1]^2$, zadanym wzorami

$$n_1(x,y) = \tfrac{t_x}{t_x + t_{1-x}} = \frac{x + \max\{0, (\mathbf{e}_1 - \mathbf{x})R_X \mathbf{y}^T\}}{1 + \max\{0, (\mathbf{e}_1 - \mathbf{x})R_X \mathbf{y}^T\} + \max\{0, (\mathbf{e}_2 - \mathbf{x})R_X \mathbf{y}^T\}},$$

$$n_2(x,y) = \tfrac{t_y}{t_y + t_{1-y}} = \frac{y + \max\{0, \mathbf{x}R_Y(\mathbf{e}_1 - \mathbf{y})^T\}}{1 + \max\{0, \mathbf{x}R_Y(\mathbf{e}_1 - \mathbf{y})^T\} + \max\{0, \mathbf{x}R_Y(\mathbf{e}_2 - \mathbf{y})^T\}}.$$

Jest oczywiste, że przekształcenie to jest ciągłe. Natomiast gorzej jest z różniczkowalnością. Tam, gdzie co najmniej jedno z wyrażeń $(\mathbf{e}_1 - \mathbf{x})R_X\mathbf{y}^T$, $(\mathbf{e}_2 - \mathbf{x})R_X\mathbf{y}^T$, $\mathbf{x}R_Y(\mathbf{e}_1 - \mathbf{y})^T$, $\mathbf{x}R_Y(\mathbf{e}_2 - \mathbf{y})^T$ zeruje się, przekształcenie może nie być różniczkowalne. Łatwo policzyć, że może to nastąpić co najwyżej na jednej prostej pionowej i jednej prostej poziomej. A więc kwadrat $[0,1]^2$ może być podzielony na 2 lub 4 prostokąty, na których przekształcenie jest różniczkowalne (nawet analityczne), a na prostych gdzie prostokąty się przecinają istnieją pochodne jednostronne.

Studiowanie dynamiki tego przekształcenia daje wgląd w to, co się stanie jeśli gra będzie powtarzana wiele razy z zastosowaniem lepszej odpowiedzi.

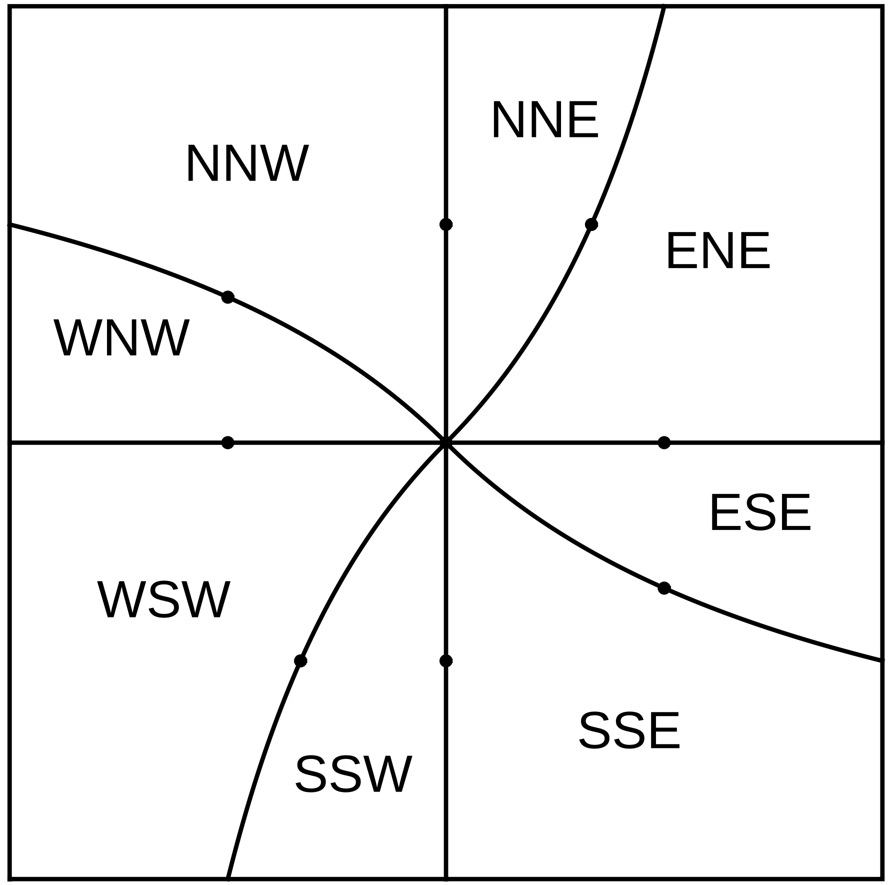
Przejdźmy do konkretnego przykładu: gra w orła i reszkę (Matching Pennies). Gracze X i Y kładą równocześnie na stole monety tej samej wartości. Jeśli monety położone są tą samą stroną do góry, obie zabiera gracz X, jeśli strony się różnią, obie zabiera gracz Y. Macierze wypłat są:

$$R_X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R_Y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

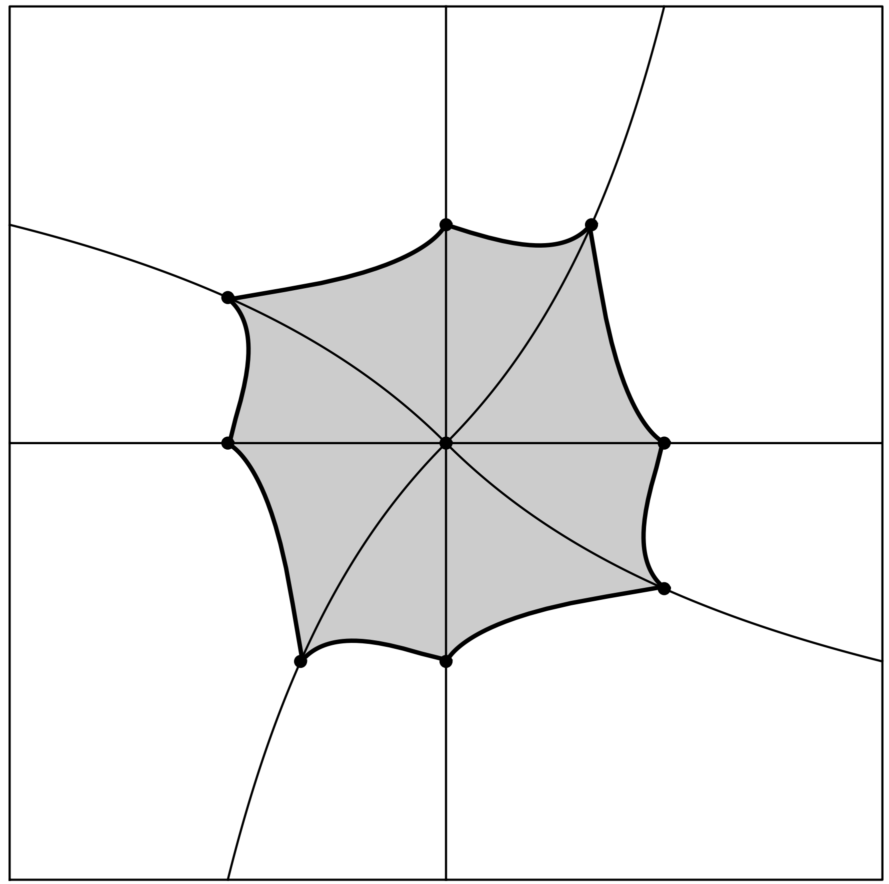
Dowód Nasha bazował na dość prostej obserwacji, że punkty stałe przekształcenia Nasha to punkty równowagi Nasha (te własności są równoważne). W naszym przykładzie łatwo zauważyć, że punkt $(1/2, 1/2)$ jest jedynym punktem równowagi Nasha. Odpowiada on strategiom $(1/2, 1/2)$ dla obu graczy. Istotnie, przy takiej strategii wartość oczekiwana wypłaty jest 0 niezależnie od strategii przeciwnika.

Skyrms w swojej książce *The Dynamics of Rational Deliberation* (Harvard University Press, 1990) badał za pomocą komputera dynamikę istotnego przekształcenia Nasha n dla gry w orła i reszkę i doszedł do wniosku, że punkt $(1/2, 1/2)$ jest globalnie przyciągający. Okazuje się, że jest to dalekie od prawdziwego stanu rzeczy.

Podzielmy kwadrat $[0,1]^2$ na 8 obszarów za pomocą krzywych
$x = 1/2$, $1/2 \le y \le 1$; $x = 1 - 1/(4y)$, $1/2 \le y \le 1$;
$y = 1/2$, $1/2 \le x \le 1$; $y = 1/(4x)$, $1/2 \le x \le 1$;
$x = 1/2$, $0 \le y \le 1/2$; $x = 1/(4 - 4y)$, $1/2 \le y \le 1$;
$y = 1/2$, $0 \le x \le 1/2$; $y = 1 - 1/(4 - 4x)$, $1/2 \le x \le 1$
i oznaczmy te obszary jak strony świata.


NNW
NNE
ENE
WNW
ESE
WSW
SSE
SSW

Oznaczmy przez $\Omega = \bigcap_{k \geq 0} n^k([0,1]^2)$ przecięcie wszystkich obrazów kwadratu $[0,1]^2$ pod działaniem iteracji przekształcenia n:



Twierdzenie 1. *Istotne przekształcenie Nasha dla gry w orła i reszkę ma następujące własności:*

(a) *Przekształcenie n jest homeomorfizmem kwadratu $[0,1]^2$ na swój obraz.*

(b) *Każdy z obszarów jest przekształcany w sąsiedni obszar zgodnie z ruchem wskazówek zegara, homeomorficznie na swój obraz.*

(c) *Punkt $(1/2, 1/2)$ jest jedynym punktem stałym przekształcenia n. Jest to punkt odpychający.*

(d) *Istnieje orbita okresowa P okresu 8: $(1/2, 3/4)$, $(2/3, 3/4)$, $(3/4, 1/2)$, $(3/4, 1/3)$, $(1/2, 1/4)$, $(1/3, 1/4)$, $(1/4, 1/2)$, $(1/4, 2/3)$. Na każdej granicy między obszarami znajduje się jeden punkt tej orbity.*

(e) *Trajektorie wszystkich punktów na granicach między obszarami, z wyjątkiem punktu $(1/2, 1/2)$, są przyciągane pod działaniem n^8 do punktów orbity P na odpowiednich granicach.*

(f) *Trajektoria każdego punktu w danym obszarze (otwartym) jest przyciągana pod działaniem n^8 do punktu orbity P leżącego na granicy tego obszaru z następnym obszarem w kierunku ruchu wskazówek zegara.*

(g) *Trajektoria każdego punktu kwadratu, poza* $(1/2, 1/2)$, *jest przyciągana pod działaniem* n *do orbity* P.

(h) *Punkt stały i punkty orbity* P *są jedynymi punktami okresowymi* n.

(i) *Zbiór* Ω *jest zwarty, spójny i zawiera punkt* $(1/2, 1/2)$ *w swoim wnętrzu. Punkty orbity* P *leżą na jego brzegu. Przekształcenie* n *obcięte do* Ω *jest homeomorfizmem* Ω *na siebie.*

(j) *Zbiór* Ω *jest sumą rozmaitości niestabilnych punktów orbity* P *i punktu* $(1/2, 1/2)$. *Jego wnętrze jest rozmaitością niestabilną* $(1/2, 1/2)$, *a jego brzeg jest sumą rozmaitości niestabilnych punktów* P.

(k) *Suma wypłat na orbicie* P *jest zero dla każdego z graczy.*

Wróćmy do wzorów

$$\begin{aligned} t_x &= \quad x &+& \max\{0, (\mathbf{e}_1 - \mathbf{x}) R_X \mathbf{y}^T\}, \\ t_{1-x} &= (1-x) &+& \max\{0, (\mathbf{e}_2 - \mathbf{x}) R_X \mathbf{y}^T\}, \\ t_y &= \quad y &+& \max\{0, \mathbf{x} R_Y (\mathbf{e}_1 - \mathbf{y})^T\}, \\ t_{1-y} &= (1-y) &+& \max\{0, \mathbf{x} R_Y (\mathbf{e}_2 - \mathbf{y})^T\}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że dodajemy w każdym z nich dwie kompletnie różne wielkości: prawdopodobieństwo i wartość oczekiwaną. Jest więc naturalne zastanowić się, jak zmieni się dynamika naszego przekształcenia gdy jedną z tych liczb pomnożymy przez stałą dodatnią c:

$$\begin{aligned} t_x^{(c)} &= \quad x &+& c \cdot \max\{0, (\mathbf{e}_1 - \mathbf{x}) R_X \mathbf{y}^T\}, \\ t_{1-x}^{(c)} &= (1-x) &+& c \cdot \max\{0, (\mathbf{e}_2 - \mathbf{x}) R_X \mathbf{y}^T\}, \\ t_y^{(c)} &= \quad y &+& c \cdot \max\{0, \mathbf{x} R_Y (\mathbf{e}_1 - \mathbf{y})^T\}, \\ t_{1-y}^{(c)} &= (1-y) &+& c \cdot \max\{0, \mathbf{x} R_Y (\mathbf{e}_2 - \mathbf{y})^T\}. \end{aligned}$$

W ten sposób otrzymujemy zmodyfikowane przekształcenie

$$n^{(c)}:[0,1]^2\to[0,1]^2,$$

dane przez

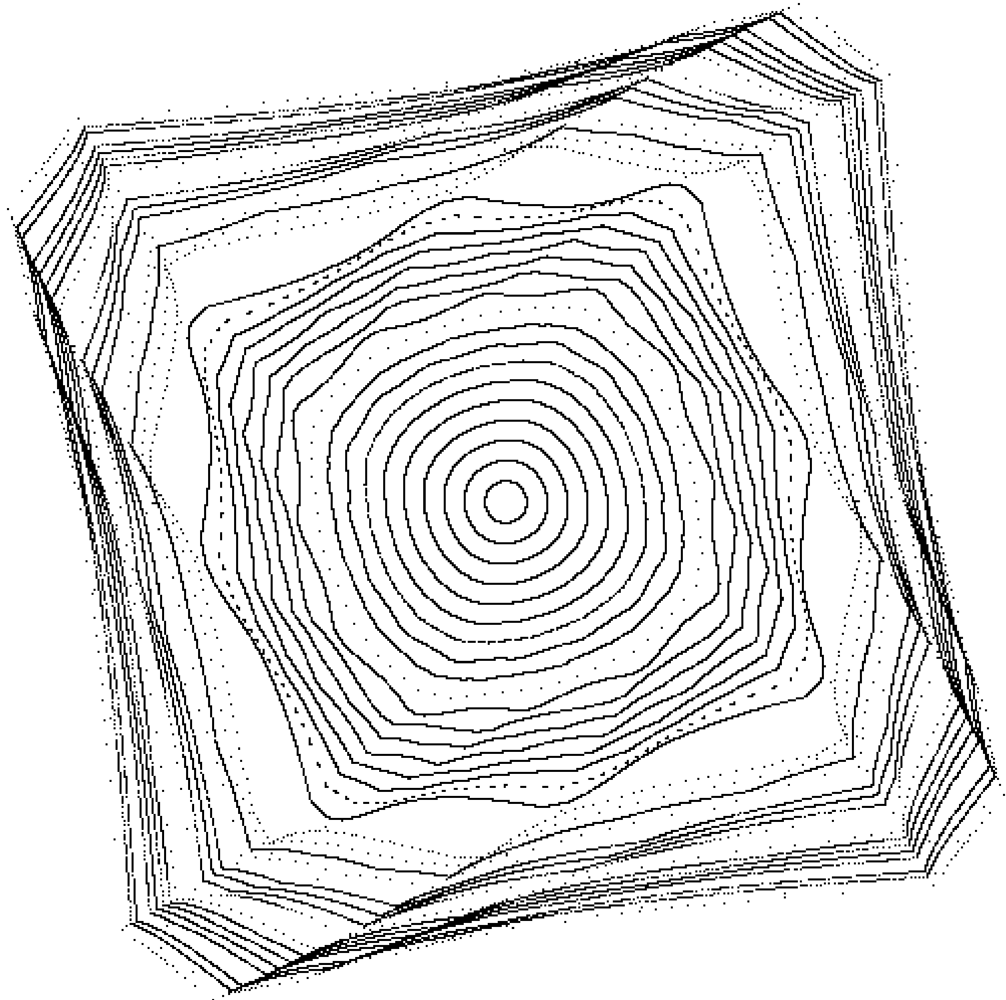
$$n^{(c)}(x,y)=\left(\frac{t_x^{(c)}}{t_x^{(c)}+t_{1-x}^{(c)}},\frac{t_y^{(c)}}{t_y^{(c)}+t_{1-y}^{(c)}}\right).$$

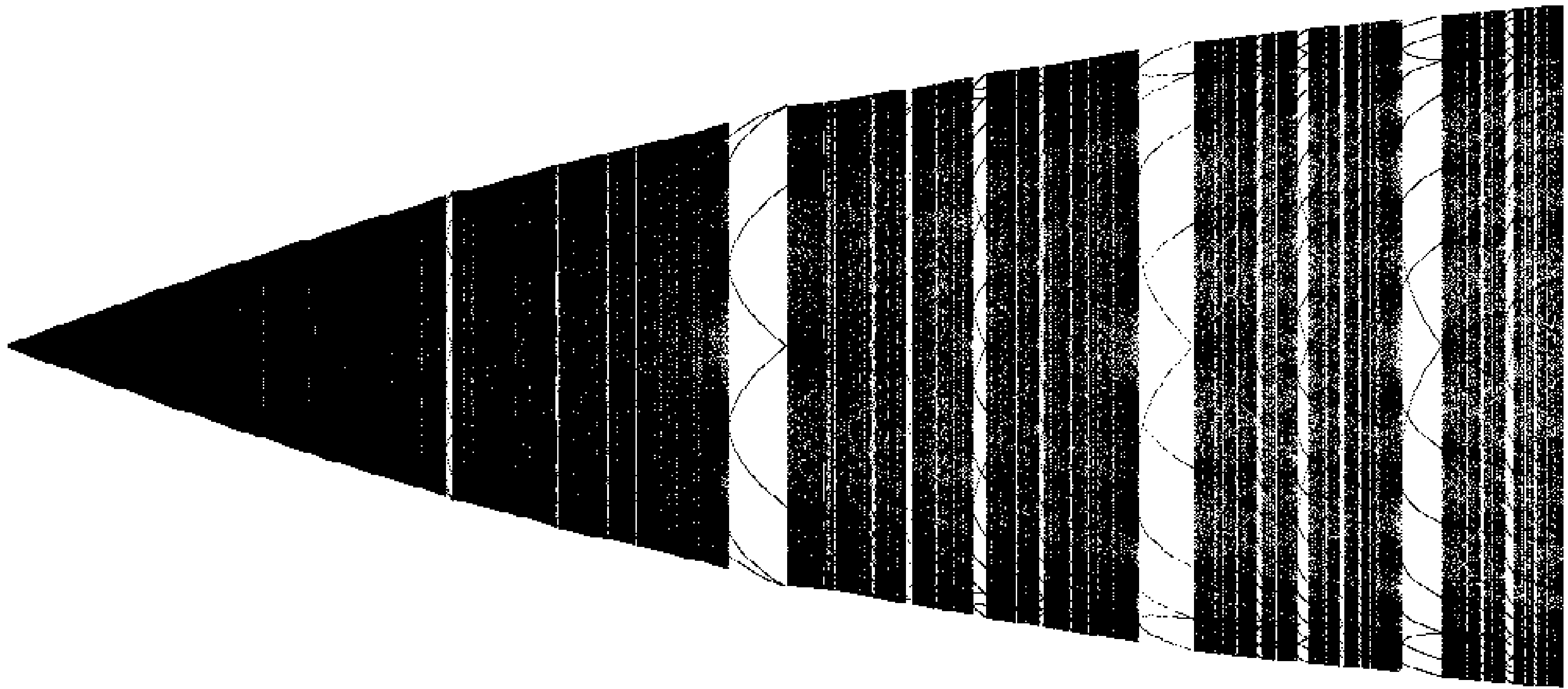
Parametr c mierzy jak bardzo gracze chcą ryzykować, zmieniając swoją strategię zamiast konserwatywnie trzymać się poprzedniej. Nazwijmy więc c **współczynnikiem ryzyka**. Gdy c dąży do zera, zmiana jest coraz mniejsza i $n^{(c)}$ dąży do identyczności. Gdy c dąży do nieskończoności, poprzednia strategia odgrywa coraz mmniejszą rolę i $n^{(c)}$ dąży do przekształcenia najlepszej odpowiedzi.

Zauważmy, że wprowadzenie parametru c we wzorach na t daje ten sam efekt co pomnożenie obu macierzy wypłat przez c.

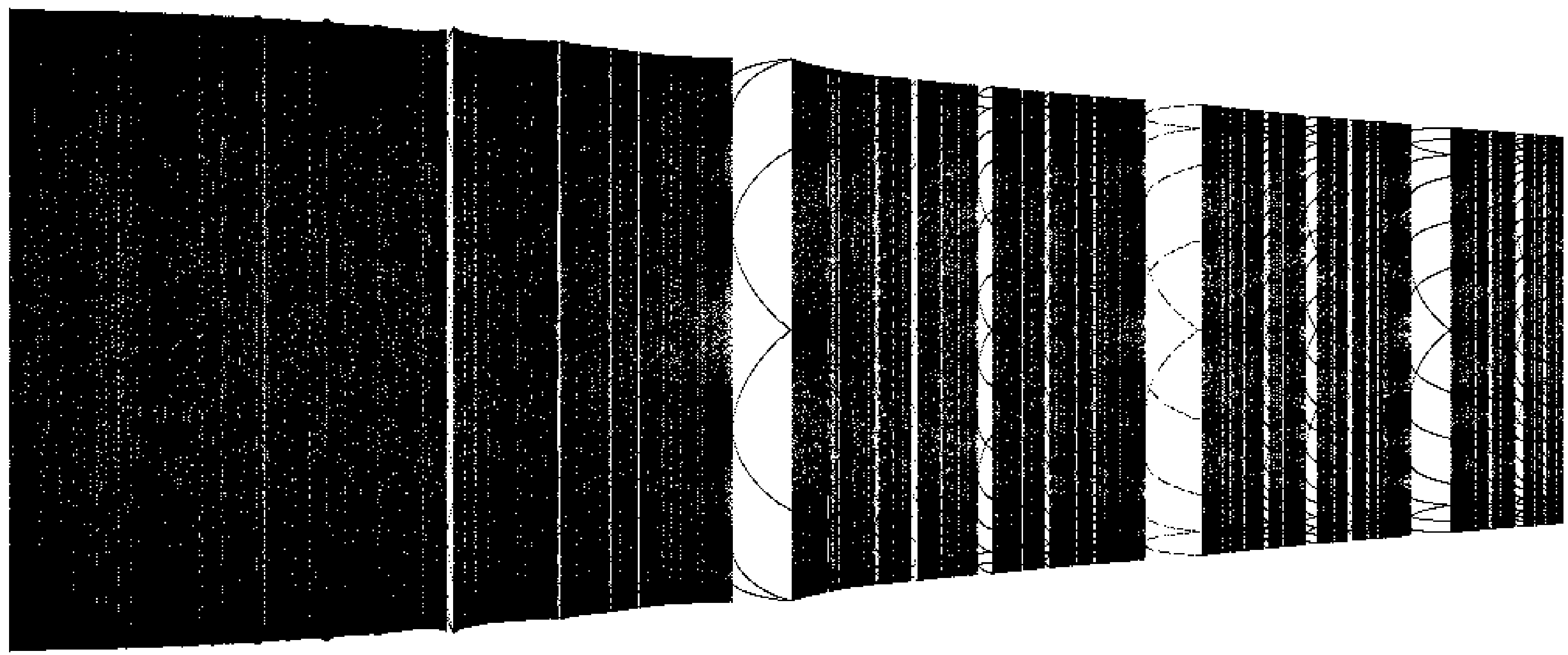
Dynamikę przekształcenia $n^{(1)} = n$ dla gry w orła i reszkę można interpretować w sposób następujący. Trajektorie wszystkich punktów kwadratu, poza $(1/2, 1/2)$, są przyciągane do niezmienniczej krzywej (brzegu obszaru Ω), która jest homeomorficzna z okręgiem. Na tej krzywej przekształcenie jest zachowującym orientację homeomorfizmem o liczbie obrotu $-1/8$ (liczba obrotu mierzy o jaki kąt średnio nastąpił obrót przy jednej iteracji homeomorfizmu; pełen obrót o 360 stopni odpowiada liczbie obrotu 1). Ma ono orbitę o okresie 8, przyciągającą jednostronnie.

Eksperymenty komputerowe sugerują, że dla innych wartości współczynnika ryzyka sytuacja jest podobna. Zmienia się tylko wielkość i kształt krzywej niezmienniczej oraz liczba obrotu. W szczególności, kiedy liczba obrotu jest niewymierna, na krzywej niezmienniczej nie ma punktów okresowych i po prostu cała krzywa jest przyciągająca. Gdy współczynnik ryzyka dąży do zera, średnica krzywej dąży do zera, a jej kształt coraz lepiej aproksymuje okrąg. Liczba obrotu również dąży do zera.





Oś pozioma jest c, a pionowa x.



Poprzedni rysunek przeskalowany. Oś pozioma jest c, a pionowa $(x-1/2)/c$.

Eksperymenty komputerowe sugerują, że po przeskalowaniu graniczny okrąg ma promień nieco mniejszy niż $0,3$. Okazuje się, że ten promień jest równy...

Zagadka: jaka liczba odrobinę mniejsza niż $0,3$ może się pojawić w naturalny sposób w takim zagadnieniu?

Odpowiedź: oczywiście $3\pi/32 \approx 0.294524311274043$.

Twierdzenie 2. *Dla dostatecznie małych wartości parametru c, przekształcenie $n^{(c)}$ ma krzywą niezmienniczą Γ_c, która przyciąga trajektorie co najmniej wszystkich punktów dysku o środku $(1/2, 1/2)$ i promieniu c (oprócz trajektorii punktu stałego $(1/2, 1/2)$). W przeskalowanych współrzędnych biegunowych r, ϑ, gdzie $x - 1/2 = cr\cos\vartheta$, $y - 1/2 = cr\sin\vartheta$, krzywa Γ_c jest wykresem funkcji lipschitzowskiej φ_c. Gdy c dąży do 0, funkcja φ_c dąży jednostajnie do stałej $3\pi/32$, a jej stała Lipschitza dąży do 0.*

Rozpatrzmy teraz przypadek ogólny gier dwuosobowych z dwiema strategiami czystymi. Niech macierze wypłat będą

$$R_X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad R_Y = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}.$$

Oznaczmy

$$\alpha = a - c, \quad \beta = b - d, \quad \gamma = a' - b', \quad \delta = c' - d'.$$

Będziemy zakładać, że żadna z tych czterech liczb nie jest równa 0, czyli rozpatrujemy tylko przypadki niezdegenerowane.

Łatwo sprawdzić, że wielkości t_x, t_{1-x}, t_y i t_{1-y}, a więc i przekształcenie n, zależą jedynie od α, β, γ i δ.

Ze względu na dynamikę przekształcenia Nasha można gry podzielić na 3 klasy: ze strategią dominującą, eliptyczne i hiperboliczne.

Gry ze strategią dominującą

Jeśli α i β mają ten sam znak, gracz X ma **strategię dominującą**, to znaczy taką strategię czystą, która daje większą wypłatę niż druga strategia czysta, niezależnie od tego jaką strategię stosuje drugi gracz. Podobnie, jeśli γ i δ mają ten sam znak, to gracz Y ma strategię dominującą.

Jeśli którykolwiek z graczy ma strategię dominującą, istnieje tylko jeden punkt równowagi Nasha i składa się on ze strategii czystych (czyli jest wierzchołkiem kwadratu $[0, 1]^2$). Dla istotnego przekształcenia Nasha jest to punkt stały globalnie przyciągający, czyli przyciągający trajektorie wszystkich punktów.

Wydawałoby się, że ten punkt równowagi Nasha daje najlepsze wypłaty dla graczy. Wcale jednak nie musi tak być. Klasycznym przykładem jest gra zwana **dylematem więźnia**.

Policja zatrzymuje dwóch podejrzanych i każdy z nich ma do wyboru milczeć albo zeznawać, obciążając drugiego z podejrzanych. Policji takie zeznania są na rękę, więc gwarantuje zeznającemu obniżenie wyroku. Jeśli jeden z podejrzanych będzie zeznawał, a drugi nie, zeznający zostanie skazany na rok więzienia, a milczący na 6 lat. Jeśli obaj będą zeznawać, każdy z nich odsiedzi 4 lata. Jeśli jednak obydwaj będą milczeć, każdy z nich dosatanie wyrok 2 lat, bo jednak policja ma na nich różne haki. Macierze wypłat są więc następujące:

$$R_X = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, \qquad R_Y = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Dostajemy

$$\alpha = -1, \quad \beta = -2, \quad \gamma = -1, \quad \delta = -2.$$

Każdy z graczy ma więc strategię dominującą. Jasne jest, że jest to strategia „zeznawać”. Jeśli obydwaj będą stosować tę strategię, każdy z nich otrzyma wyrok 4 lat więzienia. A jednak, gdyby obydwaj milczeli, byłyby to tylko 2 lata.

Jest to znany paradoks i ponieważ podobne sytuacje występują w wielu dziedzinach życia, napisano na ten temat bardzo wiele. Z naszego punktu widzenia (przekształcenie Nasha) jest to jednak najmniej ciekawy przypadek.

Gry z dynamiką eliptyczną

Ta klasa gier obejmuje przypadek, gdy α i δ mają ten sam znak, zaś β i γ mają znak przeciwny niż α i δ. Wówczas istotne przekształcenie Nasha jest różnowartościowe. Gra ma dokładnie jeden punkt równowagi Nasha i składa się on ze strategii mieszanych (znajduje się we wnętrzu kwadratu $[0,1]^2$). Jest to jedyny punkt stały istotnego przekształcenia Nasha i jest on odpychający dla tego przekształcenia.

Przykładem takiej gry jest rozpatrywana przez nas wcześniej gra w orła i reszkę. Istotnie, mamy wtedy

$$\alpha = 2, \quad \beta = -2, \quad \gamma = -2, \quad \delta = 2.$$

Zauważmy, że dowód, iż punkt stały jest odpychający, nie jest natychmiastowy, ponieważ w tym punkcie pochodne cząstkowe przekształcenia mogą być różne w każdej z czterech ćwiartek.

Gry z dynamiką hiperboliczną

Jest to klasa gier dla których α i γ mają ten sam znak, zaś β i δ mają znak przeciwny niż α i γ. Wówczas są 3 punkty równowagi Nasha. Dwa z nich składają się ze strategii czystych i dla istotnego przekształcenia Nasha są przyciągającymi punktami stałymi. Trzeci składa się ze strategii mieszanych i nie jest przyciągający.

Załóżmy, że $\alpha, \gamma > 0$ i $\beta, \delta < 0$. Wewnętrzny punkt stały istotnego przekształcenia Nasha n to $\left(\frac{\delta}{\delta-\gamma}, \frac{\beta}{\beta-\alpha}\right)$. Patrząc z tego punktu, możemy podzielić kwadrat na cztery ćwiartki. Pozostałe dwa punkty stałe to $(0,0)$ i $(1,1)$. Trajektorie wszystkich punktów z południowo-zachodniej ćwiartki dążą do punktu $(0,0)$, a z północno-wschodniej do $(1,1)$. W szczególności, pokazuje to, że wewnętrzny punkt stały nie może być przyciągający.

Rozpatrzmy teraz jednoparametrową rodzinę gier z hiperboliczną dynamiką, zadaną przez $\gamma = \alpha$ i $\beta = \delta = -\alpha$. Jako przykłady można zobaczyć co otrzymujemy dla wartości $\alpha = 2$ i $\alpha = 5$.

Macierze wypłat

$$R_X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R_Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

dają $\alpha = 2$ i odpowiadają grze w koordynację. Obydwaj gracze wygrywają gdy uda im się skoordynować swoje dziełania, przegrywają gdy nie uda im się to.

Macierze wypłat

$$R_X = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \qquad R_Y = \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

dają $\alpha = 5$, a po zmianie kolejności strategii jednego z graczy (co jest sprawą wyłącznie oznaczeń) otrzymujamy macierze wypłat

$$R_X = \begin{bmatrix} -10 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R_Y = \begin{bmatrix} -10 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odpowiadają one grze w tchórza (chicken). Dwa samochody jadą naprzeciw siebie. Jeśli żaden z nich nie skręci, zderzają się i odpowiada to wypłacie -10 dla obu kierowców. Jeśli jeden z nich skręci, jego wypłata jest -5, a wypłata drugiego kierowcy jest 5. Jeśli obydwoje skręcą, wypłata jest 0.

Można też interpretować tę rodzinę inaczej. Ustalmy jakąś bazową wartość parametru α, na przykład 1. Pomnożenie obu macierzy wypłat przez liczbę dodatnią c daje znów grę z tej rodziny, dla $\alpha = c$. Z drugiej strony odpowiada ono pierwotnej grze ze współczynnikiem ryzyka c. Tak więc z punktu widzenia dynamiki przekształcenia Nasha rodzina gier ze zmiennym parametrem α jest równoważna jednej grze ze zmiennym współczynnikiem ryzyka.

Twierdzenie 3. *Dla rodziny gier zdefiniowanej powyżej, istotne przekształcenie Nasha n ma następujące własności:*

(a) *Dla każdego α punkty $(0, 0)$ i $(1, 1)$ są zachowującymi orientację topologicznie przyciągającymi punktami stałymi. Punkt $(1/2, 1/2)$ jest trzecim punktem stałym. Nie ma innych punktów stałych.*

(b) *Jeśli $0 < \alpha \leq 1/2$, n jest homeomorfizmem na swój obraz. Jeśli $\alpha > 1/2$, n nie jest różnowartościowe.*

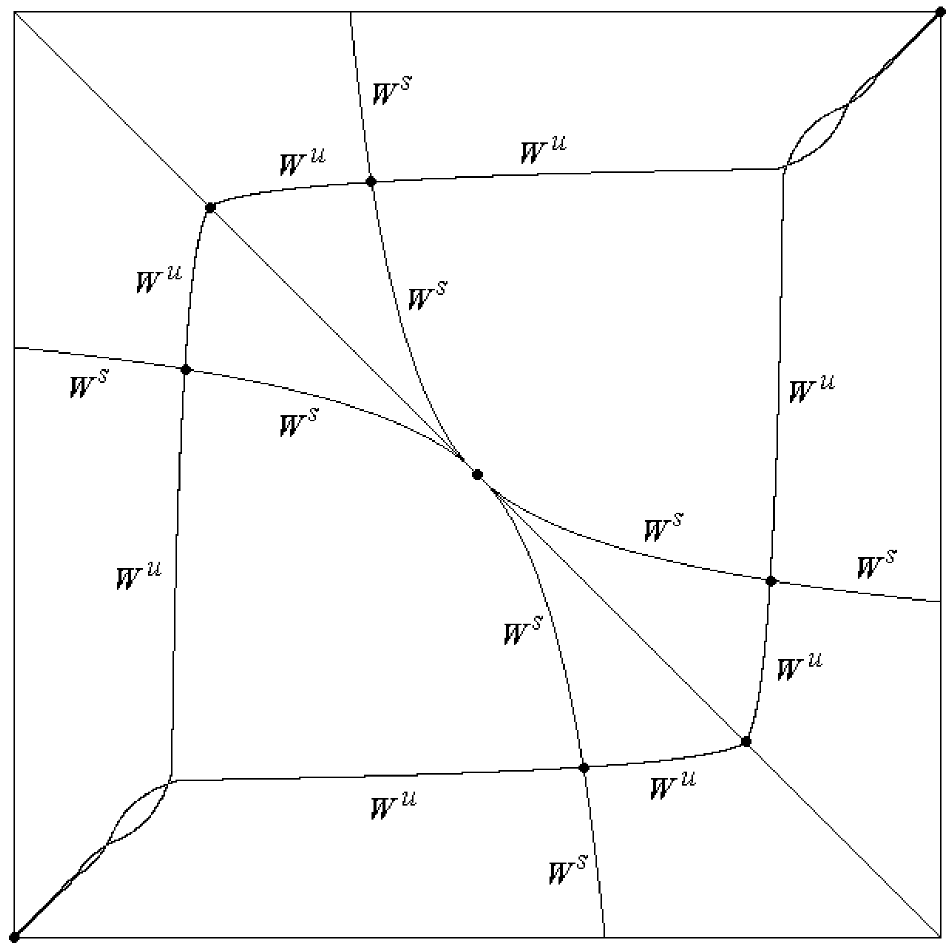
(c) *Dla $0 < \alpha < 2$, punkt $(1/2, 1/2)$ jest zachowującym orientację punktem siodłowym, którego rozmaitość stabilna jest przeciwprzekątną kwadratu, a rozmaitość niestabilna jest przekątną kwadratu (bez punktów $(0, 0)$ i $(1, 1)$).*

(d) *Dla $2 < \alpha < 4$, punkt $(1/2, 1/2)$ zmieniającym orientację punktem siodłowym, którego rozmaitość stabilna jest przeciwprzekątną kwadratu, a rozmaitość niestabilna jest przekątną kwadratu (bez punktów $(0, 0)$ i $(1, 1)$).*

(e) *Dla* $\alpha < 2(1+\sqrt{2})$*, trajektorie wszystkich punktów poniżej przeciwprzekątnej dążą do* $(0,0)$*, zaś trajektorie wszystkich punktów powyżej przeciwprzekątnej dążą do* $(1,1)$*.*

(f) *Dla* $4 < \alpha < 2(1+\sqrt{2})$*, punkt* $(1/2, 1/2)$ *jest zmieniającym orientację odpychającym punktem stałym. Istnieje siodłowa orbita okresu* 2 *na przeciwprzekątnej. Jeden punkt tej orbity leży poniżej* $(1/2, 1/2)$ *i jego rozmaitość stabilna jest częścią przeciwprzekątnej na której* $x > 1/2$*. Drugi punkt tej orbity leży powyżej* $(1/2, 1/2)$ *i jego rozmaitość stabilna jest częścią przeciwprzekątnej na której* $x < 1/2$*.*

(g) *Dla* $\alpha > 2(1+\sqrt{2})$*, punkt* $(1/2, 1/2)$ *jest zmieniającym orientację odpychającym punktem stałym. Istnieje przyciągająca orbita okresu* 2 *na przeciwprzekątnej. Istnieją dwie siodłowe orbity okresu* 2 *związane z orbitą okresu* 2 *na przeciwprzekątnej. Jedna z nich leży poniżej przeciwprzekątnej, a druga powyżej. Nie ma żadnych innych punktów okresowych. Trajektoria każdego punktu dąży do jednej z orbit okresowych.*



Punkty okresowe i rozmaitości stabilne i niestabilne przekształcenia n dla $\alpha = 6$. Widoczne przecięcia dwóch różnych rozmaitości niestabilnych spowodowane są faktem, że przekształcenie nie jest różnowartościowe.

Aby zrozumieć, jak następuje zmiana orientacji punktu siodłowego dla $\alpha = 2$, zauważmy, że n nie jest rożnowartościowe. Gdy $\alpha \neq 2$, rozmaitość stabilna jest dobrze zdefiniowana lokalnie w otoczeniu punktu $(1/2, 1/2)$. Jej dalsze części definiujemy jako obrazy lokalnej rozmaitości stabilnej. Jeśli $\alpha < 2$, lokalnie orientacja na niej jest zachowywana, ale szybko „zawraca" ona i przechodzi znów przez $(1/2, 1/2)$ idąc w przeciwnym kierunku. Kiedy α zbliża się do 2, punkt zawracania jest bliżej i bliżej punktu $(1/2, 1/2)$, aby dla $\alpha > 2$ już nie było zawracania, ale po prostu zmiana orientacji od początku.