

Przeptywy polimerów

Agnieszka Świerczewska-Gwiazda

Uniwersytet Warszawski, Instytut Matematyki Stosowanej
i Mechaniki

MTZMwD, 29 sierpnia 2014

Czym są polimery?

Polimery - substancje chemiczne składające się z powtarzających się jednostek strukturalnych (*monomerów*) powstałych w wyniku procesu polimeryzacji

Czym są polimery?

Polimery - substancje chemiczne składające się z powtarzających się jednostek strukturalnych (*monomerów*) powstałych w wyniku procesu polimeryzacji

Polimeryzacja - proces łączenia się monomerów w wyniku reakcji chemicznej, skutkiem czego powstają łańcuchy polimerów, czy trójwymiarowe sieci.

Czym są polimery?

Polimery - substancje chemiczne składające się z powtarzających się jednostek strukturalnych (*monomerów*) powstałych w wyniku procesu polimeryzacji

Polimeryzacja - proces łączenia się monomerów w wyniku reakcji chemicznej, skutkiem czego powstają łańcuchy polimerów, czy trójwymiarowe sieci.

Depolimeryzacja - proces odwrotny, czyli reakcja chemiczna rozpadu polimerów na monomery

Czym są polimery?

Polimery - substancje chemiczne składające się z powtarzających się jednostek strukturalnych (*monomerów*) powstałych w wyniku procesu polimeryzacji

Polimeryzacja - proces łączenia się monomerów w wyniku reakcji chemicznej, skutkiem czego powstają łańcuchy polimerów, czy trójwymiarowe sieci.

Depolimeryzacja - proces odwrotny, czyli reakcja chemiczna rozpadu polimerów na monomery

Przykłady polimerów naturalnych



Przykłady polimerów naturalnych



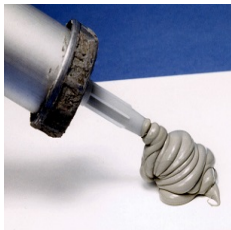
Przykłady polimerów naturalnych



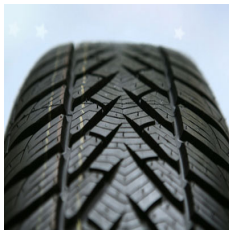
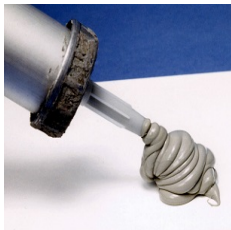
Przykłady polimerów naturalnych



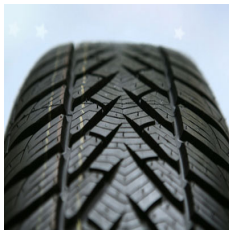
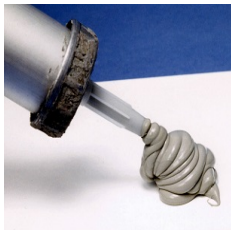
Przykłady polimerów syntetycznych



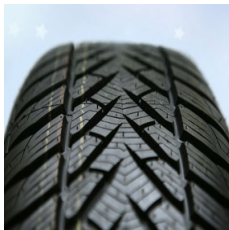
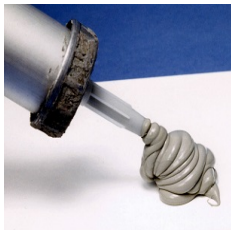
Przykłady polimerów syntetycznych



Przykłady polimerów syntetycznych



Przykłady polimerów syntetycznych



Chcemy zrozumieć zachowanie polimerów

- w makroskali (prędkość, ciśnienie, gęstość, temperatura)

Chcemy zrozumieć zachowanie polimerów

- w makroskali (prędkość, ciśnienie, gęstość, temperatura)
- w mikroskali (konfiguracja monomerów, długość łańcuchów, ich kształt)

Chcemy zrozumieć zachowanie polimerów

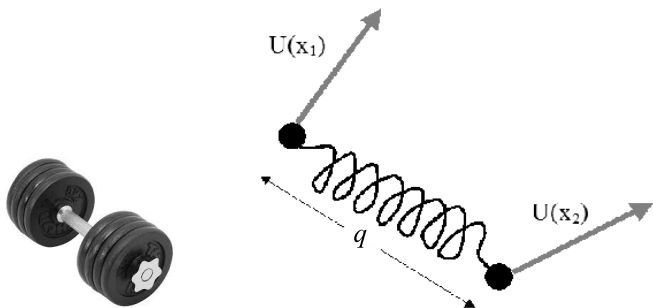
- w makroskali (prędkość, ciśnienie, gęstość, temperatura)
- w mikroskali (konfiguracja monomerów, długość łańcuchów, ich kształt)

Chcemy zrozumieć zachowanie polimerów

- w makroskali (prędkość, ciśnienie, gęstość, temperatura)
- w mikroskali (konfiguracja monomerów, długość łańcuchów, ich kształt)

- Prezentacja różnych modeli mikro-makroskopowych (Navier-Stokes, Fokker-Planck)
- Prezentacja modelu monomerów-polimerów, np. proliferacji prionów (poziom mikroskopowy)
- Nowe rezultaty uwzględniające procesy polimeryzacji i fragmentacji (uogólniony Navier-Stokes, równania Smoluchowskiego)
- Metody analityczne wykorzystywane w dowodzie istnienia słabych rozwiązań

Dumbbell models: łańcuchy polimerów \sim hantle



Opisujemy polimery jako kulki (nie posiadające masy) połączone sprężyną. Wektor łączący końce sprężyny oznaczamy przez q .

Na ewolucję q wpływają:

- 1 hydrodynamiczna siła oporu działająca na cząstkę
 - Jeśli cząstki zanurzone są w płynie (o niejednorodnej prędkości), to należy uwzględnić siłę rozciągania spowodowaną różnicą prędkości przepływu zewnętrznego między dwoma kulkami
- 2 szum termiczny
- 3 siła sprężystości sprężyny

Układ Naviera-Stokes-Fokkera-Plancka (Finitely Extensible Nonlinear Elastic):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla_x)u - \nu \Delta_x u + \nabla_x p = \text{div}_x \tau(\psi) + f,$$

$$\text{div}_x u = 0$$

oraz

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi}{\partial t} + (u \cdot \nabla_x)\psi + \nabla_q \cdot \left[(\nabla_x u) q \psi \right] \\ & = \nabla_q \cdot \left(\nabla_q \psi + U' \left(\frac{|q|^2}{2} \right) \right) + \varepsilon \Delta_x \psi \end{aligned}$$

gdzie $\psi(t, x, q)$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa.

Układ Naviera-Stokes-Fokkera-Plancka (Finitely Extensible Nonlinear Elastic):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla_x)u - \nu \Delta_x u + \nabla_x p = \text{div}_x \tau(\psi) + f,$$

$$\text{div}_x u = 0$$

oraz

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi}{\partial t} + (u \cdot \nabla_x)\psi + \nabla_q \cdot \left[(\nabla_x u) q \psi \right] \\ & = \nabla_q \cdot \left(\nabla_q \psi + U' \left(\frac{|q|^2}{2} \right) \right) + \varepsilon \Delta_x \psi \end{aligned}$$

gdzie $\psi(t, x, q)$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa.

Dodatkowy tensor naprężeń (Extra stress tensor)

$$\tau(\psi) = \int_D \mathbf{q} \otimes \mathbf{q} U' \left(\frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) \psi(t, \mathbf{x}, \mathbf{q}) d\mathbf{q}$$

Potencjał sprężyny U :

- potencjał Hooke'a: $U \left(\frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) = \frac{|\mathbf{q}|^2}{2}$
- FENE: $U \left(\frac{|\mathbf{q}|^2}{2} \right) = \frac{b}{2} \ln \left(1 - \frac{|\mathbf{q}|^2}{b} \right)$, $|\mathbf{q}| \leq \sqrt{b}$

Metodami relatywnej entropii można pokazać, że

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\int_D |u|^2 dx + \int_{D \times \Omega} M \hat{\psi} (\ln \hat{\psi} - 1) + 1 dx dq \right) \\ & + \int_{\Omega} |\nabla_x u|^2 + 4 \int_{D \times \Omega} M (\varepsilon |\nabla_x \sqrt{\hat{\psi}}|^2 + |\nabla_q \sqrt{\hat{\psi}}|^2) dx dq = 0 \end{aligned}$$

gdzie

$$\hat{\psi} = \frac{\psi}{M}$$

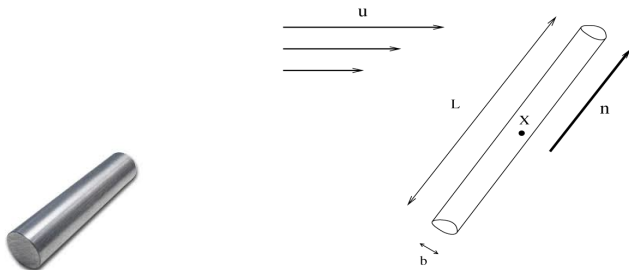
oraz M jest Maxwellianem

$$M(q) := e^{-U(\frac{|q|^2}{2})}.$$

- 1 Barrett, J.W., Schwab, C., Süli, E., Existence of global weak solutions for some polymeric flow models. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 15 (2005).
- 2 Barrett, J.W., Süli, E., Existence of global weak solutions to some regularized kinetic models of dilute polymers. *SIAM Multiscale Modelling and Simulation* 6 (2007).
- 3 Barrett, J.W., Süli, E., Existence of global weak solutions to dumbbell models for dilute polymers with microscopic cut-off. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 18 (2008).
- 4 Arnold, A.; Carrillo, J. A.; Manzini, C. Refined long-time asymptotics for some polymeric fluid flow models. *Commun. Math. Sci.* 8 (2010),

- 1 N. Masmoudi. Global existence of weak solutions to the FENE dumbbell model of polymeric flows. *Invent. Math.*, 191 (2013)
- 2 Bulíček, M.; Málek, J.; Süli, E. Existence of global weak solutions to implicitly constituted kinetic models of incompressible homogeneous dilute polymers. *Comm. Partial Differential Equations* 38 (2013),

Inne podejścia. Model Doi: polimery \sim pręty



Opisujemy polimery jako sztywne cząstki

Równania (Naviera-) Stokesa

$$\partial_t u - \Delta_x u + \nabla_x p - \operatorname{div} \tau = 0, \quad \operatorname{div} u = 0$$

oraz

$$\partial_t f = -u \cdot \nabla_x f - \nabla_n \cdot (P_{n^\perp} \nabla_x u n f) + D \Delta_x f + D_r \Delta_n f$$

- $\nabla_n, \nabla_{n^\perp}, \Delta_n$ oznaczają gradient, dywergencję oraz Laplasjan na sferze S^2 , $P_{n^\perp} \nabla_x u n = \nabla_x u n - (n \cdot \nabla_x u n) n$ oznacza rzut wektora $\nabla_x u n$ na przestrzeń styczną do n .
- Dwa ostatnie człony związane są z efektami Browna: dyfuzja translacyjna i rotacyjna.

Gradient prędkości $\nabla_x v$ zakłóca izotropowy rozkład f , co prowadzi do wzrostu entropii. Termodynamiczna zupełność modelu wymaga, aby zostało to zrównoważone przez tensor naprężeń zadany następująco

$$\tau(t, x) = \nu k_B T \int_{S^2} (3n \otimes n - \text{id}) f(t, x, n) dn.$$

- 1 Otto, Felix; Tzavaras, Athanasios, Continuity of velocity gradients in suspensions of rod-like molecules. *Comm. Math. Phys.* 277 (2008),
- 2 Bae, Hantaek; Trivisa, Konstantina, On the Doi model for the suspensions of rod-like molecules: global-in-time existence. *Commun. Math. Sci.* 11 (2013),
- 3 Bae, Hantaek; Trivisa, Konstantina, On the Doi model for the suspensions of rod-like molecules in compressible fluids. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 22 (2012)

- Model FENE
- Model Doi

Struktura problemów

- Równanie na wielkości makroskopowe v, p (Navier-Stokes), z wielkościami mikroskopowymi wpływającymi na addytywny tensor naprężeń
- Równanie na wielkości mikroskopowe (Fokker-Planck)

Co nadal nie zostało uwzględnione?

- polimeryzacja
- fragmentacja

Modele monomerów-polimerów, n.p. proliferacji prionów

ψ jest funkcją rozkładu polimerów długość $r > r_0$ rozwiązująca równanie

$$\partial_t \psi(t, r) + \tau \phi(t) \partial_r \psi(t, r) = -\beta(r) \psi(t, r) + 2 \int_r^\infty \beta(\tilde{r}) \kappa(r, \tilde{r}) \psi(t, \tilde{r}) d\tilde{r}$$

- $\tau \phi(t) \partial_r \psi(t, r)$ – przyrost długości łańcuchów w wyniku polimeryzacji z szybkością $\tau > 0$,
- $\beta(r)$ szybkość fragmentacji, czyli prawdopodobieństwo podziału polimerów zależne od długości łańcucha
- $\kappa(r, \tilde{r})$ prawdopodobieństwo, że polymer podzieli się na dwa polimery długości r oraz $\tilde{r} - r$,
- $-\beta(r) \psi(t, r)$ strata polimerów odpowiadająca podziałowi polimerów z prędkością $\beta(r)$
- ostatni człon jest zlicza polimery długości r powstałe z podziału łańcuchów długości większej niż r .

Funkcja $\phi(t, x)$ jest koncentracją wolnych monomerów spełniająca równanie

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(t, x) \\ = 2 \int_0^{r_0} r \int_r^\infty \beta(\tilde{r}) \kappa(r, \tilde{r}) \psi(t, \tilde{r}) d\tilde{r} dr - \phi(t, x) \int_{r_0}^\infty \tau \psi(t, r) dr. \end{aligned}$$

- $2 \int_0^{r_0} r \int_r^\infty \beta(\tilde{r}) \kappa(r, \tilde{r}) \psi(t, \tilde{r}) d\tilde{r} dr$ reprezentuje monomery uzyskane przy podziale polimeru na co najmniej jedną cząstkę krótszą niż długość minimalna r_0
- $-\phi(t, x) \int_{r_0}^\infty \tau \psi(t, r) dr$ – strata monomerów w wyniku procesu polimeryzacji

- 1 Greer, Meredith L.; Pujo-Menjouet, Laurent; Webb, Glenn F. A mathematical analysis of the dynamics of prion proliferation. *J. Theoret. Biol.* 242 (2006)
- 2 Calvez, Vincent; Lenuzza, Natacha; Oelz, Dietmar; Deslys, Jean-Philippe; Laurent, Pascal; Mouthon, Franck; Perthame, Benoît. Size distribution dependence of prion aggregates infectivity. *Math. Biosci.* 217 (2009)

Nowe podejście: połączmy równania płynu oraz uwzględnijmy (de-)polimeryzację

Koncepcja

Długość łańcuchów ma wpływ na lepkość płynu. Dlatego lepkość nie jest wielkością stałą (ciecze nie-newtonowskie), ale zależy od wielkości mikroskopowych

Rezultaty

Wykazujemy istnienie słabych rozwiązań, przy założeniu wielomianowych warunków wzrostu tensora naprężeń.

Model nie-newtonowski (Smoluchowski, model fragmentacji), wspólna praca z E. Süli, M. Bulíčkem i P. Gwiazdą

Rozważmy równania płynu

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) + \nabla_{\mathbf{x}} p(t, \mathbf{x}) \\ - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{S}(\psi(t, \mathbf{x}, r), \mathbf{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) = \mathbf{f}, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = 0,\end{aligned}$$

gdzie tensor naprężeń dany jest wzorem

$$\mathbf{S}(\psi(t, \mathbf{x}, r), \mathbf{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) := \nu \left(\int \psi(t, \mathbf{x}, r) dr, \mathbf{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \right) \mathbf{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$$

oraz $\nu : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest uogólnioną lepkością zależącą od prędkości ścinania oraz $\psi : (0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ (funkcji rozkładu polimerów)

$\psi : (0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest funkcją rozkładu polimerów rozwiązującą równanie

$$\begin{aligned} \partial_t \psi(t, x, r) + \mathbf{u}(t, x) \nabla_x \psi(t, x, r) + \tau \phi(t, x) \partial_r \psi(t, x, r) \\ - A(r) \Delta_x \psi(t, x, r) = -\beta(r, \mathbf{u}, \mathbf{D}_x \mathbf{u}) \psi(t, x, r) \\ + 2 \int_r^\infty \beta(\tilde{r}, \mathbf{u}, \mathbf{D}_x \mathbf{u}) \kappa(r, \tilde{r}) \psi(t, x, \tilde{r}) d\tilde{r}, \end{aligned}$$

- $\tau > 0$ prędkość polimeryzacji,
- $\beta(r, \cdot, \cdot)$ prędkość podziału polimerów długości r , która teraz zależy też od wielkości makroskopowych: prędkości rozpuszczalnika i prędkości ścinania.
- $A(r) \rightarrow 0$ przy $r \rightarrow \infty$

Funkcja $\phi(t, x)$ jest koncentracją wolnych monomerów spełniająca równanie

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(t, x) + \mathbf{u}(t, x) \nabla_x \phi(t, x) - A_0 \Delta_x \phi(t, x) \\ = - \phi(t, x) \int_0^\infty \tau \psi(t, x, r) dr. \end{aligned}$$

Dla pokazania

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} \phi(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_0^{\infty} r \int_{\Omega} \psi(t, \mathbf{x}, r) d\mathbf{x} dr \right] = 0$$

istotne jest, że $\kappa(r, \tilde{r})$ – prawdopodobieństwo, że polimer podzieli się na dwa polimery długości r oraz $\tilde{r} - r$ spełnia

$$\int_0^{\tilde{r}} \kappa(r, \tilde{r}) dr = 1, \quad \int_0^{\tilde{r}} r \kappa(r, \tilde{r}) dr = \frac{\tilde{r}}{2}.$$

Metody analityczne w dowodach istnienia słabych rozwiązań

- Ciecz nie-newtonowska + równania paraboliczne (model, który został zaprezentowany): oszacowania energetyczne, metoda obcięć Lipschitzowskich
- Model uproszczony: Ciecz nie-newtonowska + równanie hiperboliczne: metody renormalizacji dla równania transportu

Model uproszczony dla sytuacji $A(r) = 0$, duża ilość monomerów i mała ilość polimerów

Uogólniony Navier-Stokes + równanie ze strukturą:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \operatorname{div}_x(u(t, x) \otimes u(t, x)) + \nabla_x p(t, x) \\ = \operatorname{div}_x \mathbf{S}(\psi, D_x u(t, x)) + f(t, x), \\ \operatorname{div}_x u(t, x) = 0,\end{aligned}$$

oraz

$$\mathbf{S}(\psi, D_x u(t, x)) := \nu \left(\int_0^\infty \gamma(r) \psi(t, x, r) dr, |D_x u(t, x)| \right) D_x u(t, x),$$

$\nu \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ gdzie $\psi(t, x, r)$ jest gęstością polimerów długości r w chwili czasu t w x .

$\psi(t, x, r)$ jest gęstością polimerów długości r w chwili czasu t w x .

$$\begin{aligned} & \partial_t \psi(t, x, r) + \operatorname{div}_x(u(t, x)\psi(t, x, r)) \\ &= \partial_r(\tau(r)\psi(t, x, r)) - \beta(r)\psi(t, x, r) + 2 \int_r^\infty \beta(\tilde{r})\kappa(r, \tilde{r})\psi(t, x, \tilde{r})d\tilde{r} \end{aligned}$$

- $\tau > 0$ prędkość polimeryzacji,
- $\beta(r)$ - prędkość fragmentacji

$\psi(t, x, r)$ jest gęstością polimerów długości r w chwili czasu t w x .

$$\begin{aligned} & \partial_t \psi(t, x, r) + \operatorname{div}_x(u(t, x)\psi(t, x, r)) \\ &= \partial_r(\tau(r)\psi(t, x, r)) - \beta(r)\psi(t, x, r) + 2 \int_r^\infty \beta(\tilde{r})\kappa(r, \tilde{r})\psi(t, x, \tilde{r})d\tilde{r} \end{aligned}$$

- $\tau > 0$ prędkość polimeryzacji,
- $\beta(r)$ - prędkość fragmentacji
- $\kappa(r, \tilde{r}) - \kappa(r, \tilde{r})$ prawdopodobieństwo, że polymer podzieli się na dwa polimery długości r oraz $\tilde{r} - r$

$\psi(t, x, r)$ jest gęstością polimerów długości r w chwili czasu t w x .

$$\begin{aligned} & \partial_t \psi(t, x, r) + \operatorname{div}_x(u(t, x)\psi(t, x, r)) \\ &= \partial_r(\tau(r)\psi(t, x, r)) - \beta(r)\psi(t, x, r) + 2 \int_r^\infty \beta(\tilde{r})\kappa(r, \tilde{r})\psi(t, x, \tilde{r})d\tilde{r} \end{aligned}$$

- $\tau > 0$ prędkość polimeryzacji,
- $\beta(r)$ - prędkość fragmentacji
- $\kappa(r, \tilde{r})$ - $\kappa(r, \tilde{r})$ prawdopodobieństwo, że polymer podzieli się na dwa polimery długości r oraz $\tilde{r} - r$

Trudności analityczne koncentrują się wokół pokazania, że

$$\int_0^\infty \gamma(r) \psi^n(t, x, r) dr \rightarrow \int_0^\infty \gamma(r) \psi(t, x, r) dr$$

p.w. w Q_T . W tym celu rozważamy problem zredukowany na $\mu : [0, T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ (bez członu transportu)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu(t, r) = \frac{\partial}{\partial r} (\tau(r) \mu(t, r)) - \beta(r) \mu(t, r) + 2 \int_z^\infty \beta(r) \kappa(r, \tilde{r}) \mu(t, \tilde{r}) d\tilde{r}$$
$$\mu(0, z) = \mu_0$$

Problem dualny do problemu zredukowanego

Problem dualny (problem wstecz w czasie) do problemu zredukowanego

$$\begin{aligned} & \partial_t \varphi(t, r) \\ &= \tau(r) \partial_r \varphi(t, r) + \beta(r) \varphi(t, r) - 2 \int_0^{\infty} \beta(\tilde{r}) \kappa(\tilde{r}, r) \varphi(t, \tilde{r}) d\tilde{r} \end{aligned}$$

$$\varphi(T_1, z) = \gamma(r)$$

gdzie $T_1 \in [0, T]$ oraz

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \mu(t, r) \varphi(t, r) dr = 0$$

Problem dualny do problemu zredukowanego

Problem dualny (problem wstecz w czasie) do problemu zredukowanego

$$\begin{aligned} & \partial_t \varphi(t, r) \\ &= \tau(r) \partial_r \varphi(t, r) + \beta(r) \varphi(t, r) - 2 \int_0^{\infty} \beta(\tilde{r}) \kappa(\tilde{r}, r) \varphi(t, \tilde{r}) d\tilde{r} \end{aligned}$$

$$\varphi(T_1, z) = \gamma(r)$$

gdzie $T_1 \in [0, T]$ oraz

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \mu(t, r) \varphi(t, r) dr = 0$$

- Carrillo, J. A.; Colombo, R. M.; Gwiazda, P.; Ulikowska, A.; Structured populations, cell growth and measure valued balance laws. J. Differential Equations 252 (2012).

Problem dualny do problemu zredukowanego

Problem dualny (problem wstecz w czasie) do problemu zredukowanego

$$\begin{aligned} & \partial_t \varphi(t, r) \\ &= \tau(r) \partial_r \varphi(t, r) + \beta(r) \varphi(t, r) - 2 \int_0^{\infty} \beta(\tilde{r}) \kappa(\tilde{r}, r) \varphi(t, \tilde{r}) d\tilde{r} \end{aligned}$$

$$\varphi(T_1, z) = \gamma(r)$$

gdzie $T_1 \in [0, T]$ oraz

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \mu(t, r) \varphi(t, r) dr = 0$$

- Carrillo, J. A.; Colombo, R. M.; Gwiazda, P.; Ulikowska, A.; Structured populations, cell growth and measure valued balance laws. J. Differential Equations 252 (2012).

Mnożymy wyjściowe równanie na ψ

$$\partial_t \psi + \operatorname{div}_x(u\psi) = \partial_r(\tau\psi) - \beta\psi + 2 \int_r^\infty \beta(\tilde{r})\kappa(r, \tilde{r})\psi(t, x, \tilde{r}) d\tilde{r}$$

przez rozwiązanie problemu dualnego do problemu zredukowanego, mianowicie przez φ i całkujemy po $(0, \infty)$ względem r

$$\begin{aligned} & \partial_t \left(\int_0^\infty \varphi\psi dr \right) - \int_0^\infty \psi \partial_t \varphi dr + u \cdot \nabla_x \left(\int_0^\infty \varphi\psi dr \right) \\ &= \int_0^\infty \varphi \partial_r(\tau\psi) dr - \int_0^\infty \varphi \beta\psi dr + 2 \int_0^\infty \psi \int_0^\infty \beta(\tilde{r})\kappa(\tilde{r}, r)\varphi(t, r) d\tilde{r} dr \end{aligned}$$

Oznaczając

$$g_\varphi(t, x) := \int_0^\infty \varphi(t, r) \psi(t, x, r) dr$$

otrzymujemy

$$\partial_t g_\varphi + u \cdot \nabla_x g_\varphi = \int_0^\infty \psi \left(\partial_t \varphi - \tau \partial_r \varphi - \varphi \beta + 2 \int_0^\infty \beta(\tilde{r}) \kappa(\tilde{r}, r) \varphi(t, \tilde{r}) d\tilde{r} \right) dr$$

co jest jednorodnym równaniem transportu

$$\partial_t g_\varphi + u \cdot \nabla_x g_\varphi = 0$$

dla którego możemy stosować metody renormalizacji.

Co było kluczowe w tej procedurze?

Problem zredukowany na $\mu : [0, T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ (bez członu transportu)

$$\partial_t \mu(t, r) = \partial_r(\tau(r)\mu(t, r)) - \beta(r)\mu(t, r) + 2 \int_r^\infty \beta(r)\kappa(r, \tilde{r})\mu(t, \tilde{r})d\tilde{r}$$
$$\mu(0, r) = \mu_0$$

τ, β są niezależne od x

Rozważmy zagadnienie Cauchy'ego

$$\partial_t \psi(t, x) + u(t, x) \cdot \nabla_x \psi(t, x) = 0,$$

$$\psi(0, x) = \bar{\psi}(x),$$

gdzie $u(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ jest prędkością transportowanej wielkości $\psi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $\bar{\psi} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ jest dane.

- DiPerna, R. J. and Lions, P.-L., Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. Invent. Math. (1989).

Powiemy, że ψ jest *rozwiązaniem zrenormalizowanym* równania transportu jeśli spełnia

$$\partial_t \beta(\psi) + u \cdot \nabla_x \beta(\psi) = 0,$$

dla każdej funkcji $\beta \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Istniejące rezultaty

Istnienie, jednoznaczność i stabilność dla nisko regularnych współczynników.

$$\partial_t \psi(t, x) + u(t, x) \cdot \nabla_x \psi(t, x) = \int \gamma(x) \psi(t, x) dx,$$
$$\psi(0, x) = \bar{\psi}(x).$$

Równanie na wielkość zrenormalizowaną $\beta(\psi)$ nie jest już równaniem liniowym.

Dziękuję za uwagę!