



MODEL MATEMATYCZNY OPISUJĄCY ZACHOWANIE NIETOPERZY ZAMIESZKUJĄCYCH DZIUPLE

EWA GIREJKO, ROBERT JANKOWSKI I EWA SCHMEIDEL

STRESZCZENIE. Na podstawie rzeczywistego zachowania nietoperzy występujących w Puszczy Białowieskiej przedstawiono matematyczny model zachowania się dowolnego ich gatunku zasiedlającego dziuple drzew. Model został przedstawiony w postaci układu równań rekurencyjnych. Zaproponowany układ dynamiczny opisuje poszukiwanie kryjówki odpowiedniej dla danego gatunku nietoperzy. Dwa punkty przyciągające (atraktory) funkcji występującej w pierwszym równaniu układu odpowiadają dziuplom, które zostają zasiedlone przez nietoperze, a punkt odpychający (repulsor) dziupli, która nie została zasiedlona.

1. WSTĘP

W większości zwierzęta borykają się z problemem konieczności aktywnego wyszukiwania pożywienia i kryjówki. Poznawanie i przewidywanie ich zachowań, próby ich modelowania stanowią duże wyzwanie dla naukowców, zwłaszcza biologów, a ostatnio w dużej mierze również matematyków. Niniejsza praca jest próbą stworzenia modelu opisującego pewne zachowania zwierząt związane z wyszukiwaniem kryjówek (patrz również [16]).

Zaprezentujemy tutaj prosty dynamiczny model opisujący przenoszenie się nietoperzy zamieszkujących wspólnie dziupłę do nowej kryjówki (dziupli). Konstruując ten model mieliśmy na uwadze to, aby podobnie jak w przypadku funkcji logistycznej, był matematycznie jak najprostszy przy równoczesnym spełnieniu warunków wynikających z rzeczywistego zachowania nietoperzy. Matematyczne modele nietoperzy poruszają się po odcinku $[0, 1]$. W zerze znajduje się punkt startowy lotu, a 1 to maksymalna długość lotu nietoperza. W ten sposób otrzymujemy uproszczony ruch wzdłuż prostych w przestrzeni \mathbb{R}^n w każdym kierunku. Przyjmijmy, że w chwili $n = 0$ nietoperze zamieszkują dziupłę położoną w punkcie zero (oznaczymy ją C_1). Niech L oznacza nietoperza, który pierwszy znajduje nową dziupłę, a N^i , gdzie $i \in \mathbb{N}$, oznacza dowolnego i -tego nietoperza w kolonii. Zakładamy, że zachowanie nietoperzy N^i jest analogiczne i zatem opisane jest analogicznym równaniem. Dla uproszczenia modelu przyjmujemy oznaczenie $N^i = N$ dla każdego i . Stąd nietoperz N reprezentuje tu dowolnego osobnika z kolonii nietoperzy. Przyjmijmy jako jednostkę odległość na jaką nietoperz może oddalić się od dziupli. Niech $x, y: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$ przy

Pracę wykonano w ramach projektu Centrum Zastosowań Matematyki, współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



RYSUNEK 1. Borowiec, [26]

czym x_n i y_n oznaczają odpowiednio odległość nietoperzy L oraz N od dziupli C_1 w chwili n . Model opisujący proces ma postać układu równań rekurencyjnych opisujących położenie nietoperzy L i N w chwili $n + 1$ w zależności od ich położenia w chwili n :

$$x_{n+1} = r x_n \min\{x_n, 1 - x_n\}$$

$$|y_{n+1} - x_{n+1}| = \alpha |y_n - x_n|$$

z warunkami początkowymi

$$x(0) = x_0 \in [0, 1] \quad \text{oraz} \quad y(0) = y_0 \in [0, 1],$$

gdzie $r, \alpha \in \mathbb{R}$ są ustalonymi parametrami, $r \in (2, 3)$ oraz $\alpha \in (0, 1)$.

Modele biologiczne cieszą się aktualnie dużym zainteresowaniem, zob. [4, 9, 19, 10, 20]. W szczególności wiele prac zostało poświęconych zachowaniu się ptaków gromadzących się w stada [8, 14]. Modele te nie odpowiadają opisywanemu zachowaniu nietoperzy gromadzących się w dziuplach, bowiem grupowanie się ptaków nie jest bezpośrednio uwarunkowane topografią terenu, a w przypadku nietoperzy taka zależność występuje. Nietoperze nie grupują się bowiem w dowolnych miejscach, ale w fizycznie istniejących dziuplach drzew.

1.1. Pożywienie i kryjówki. Posiadanie efektywnie działających zmysłów pozwala zwierzęciu na uzyskanie informacji, niezbędnych do podejmowania właściwych decyzji dotyczących m.in. kierunku przemieszczania się, czy wyboru miejsc, w których należy poszukiwać zasobów. Możliwości uzyskania pełnej informacji o otoczeniu za pomocą zmysłów są ograniczone, a zwierzęta muszą opierać się na ograniczonej wiedzy o otoczeniu. Zwierzęta zwiększają szanse na odniesienie sukcesu na przykład poprzez selekcję odpowiednich obiektów, zapamiętanie rozmieszczenia zasobów w przestrzeni lub zdobywając i przekazując sobie nawzajem informacje o nich.

Szczególnie interesującą grupą zwierząt, narażaną na ograniczenia sensoryczne, są nietoperze. Są to zwierzęta nocne, potrafiące szybko latać, a do orientacji w przestrzeni wykorzystujące echolokację [22]. Liczne ograniczenia związane z echolokacją sprawiają, że nietoperze wykorzystują inne zmysły, np. wzrok, pozyskują informacje od innych osobników, zapamiętują rozmieszczenie zasobów itp. Znaczenie poszczególnych zmysłów u nietoperzy jest stosunkowo dobrze zbadane w kontekście zdobywania pokarmu, w znacznie słabszym stopniu dla wyszukiwania kryjówek [15].

Nietoperze nie budują gniazd ani innych schronień, lecz korzystają z już istniejących kryjówek wybierając miejsca ciepłe i zaciszne [25]. Kryjówkami zajmowanymi przez kolonie nietoperzy są

najczęściej strychy lub inne zakamarki budynków, nieużywane schrony, specjalnie skonstruowane budki oraz dziuple drzew. Podziemia Międzyrzeckiego Rejonu Umocnionego są największym i najważniejszym zimowiskiem nietoperzy w Polsce. Co roku zimuje tam od 20 000 do 30 000 osobników należących do 12 gatunków. Jest to największa w Środkowej Europie zimowa kolonia tych ssaków [23].

Warunki pogodowe są głównym czynnikiem kształtującym wybór schronień nietoperzy w okresie rozrodu. Stosunkowo niskie temperatury otoczenia i duże amplitudy dobowe wpływają na konieczność zasiedlania przez nietoperze kryjówek cieplejszych. Wśród czternastu zamieszkujących Puszczę Białowieską gatunków nietoperzy najliczniej spotykane w lasach są borowiec wielki (rysunek 1, [26]) oraz nocek rudy. Różne gatunki nietoperzy zasiedlają różnego typu kryjówki. Na przykład borowce zasiedlają dziuple wysoko usytuowane (głównie w dębach i jesionach), z niewielkim otworem wylotowym i dużą głębokością bezpieczną, najczęściej są to dziuple wykute przez dzięcioły. Nietoperze zasiedlają dziuple w drzewach o większej pierśnicy i wyżej usytuowane w porównaniu z dziuplami zasiedlanymi przez ptaki [3].

Ponieważ jakość kryjówek ma istotne znaczenie dla bezpieczeństwa i szybkości rozwoju młodych, ich wybór jest bardzo staranny. Nietoperze w ciągu sezonu wielokrotnie zmieniają dziuple. Konieczne są zatem efektywne strategie wyszukiwania nowych kryjówek. Ponieważ nietoperze są zwierzętami długo żyjącymi, socjalnymi, potrafiącymi się uczyć, istnieje wiele potencjalnych mechanizmów obniżających koszty wyszukiwania dziupli.

W Polsce występuje 25 gatunków nietoperzy [24]. Wszystkie objęte są ścisłą ochroną. Nietoperze to jedyne w Polsce ssaki posiadające zdolność lotu. Są to zwierzęta bardzo interesujące i mało znane z uwagi na swój tajemniczy, nocny tryb życia.

Większość gatunków nietoperzy żywi się owadami, ale są również gatunki mięsożerne, roślinożerne i owocożerne. Trzy gatunki z Ameryki Południowej odżywiają się krwią ptaków i ssaków.

1.2. Założenia modelu. Przedstawiony model (1.1) z warunkiem początkowym (1.2), dotyczy zachowań nietoperzy zamieszkujących Puszczę Białowieską. Są to nietoperze zasiedlające dziuple drzew. Co jakiś czas nietoperze przenoszą się z jednej dziupli do drugiej. Mimo, że w puszczy jest wiele podobnych dziupli, nietoperze wybierają do zamieszkania tylko niektóre z nich. Załóżmy, że w okolicy dziupli C_1 są jeszcze dwie dziuple nadające się do zasiedlenia przez nietoperze, dziuple C_2 i C_3 . Opracowując model matematyczny przyjęliśmy następujące założenia:

1. W przypadku, gdy ilość pożywienia w sąsiedztwie zasiedlonej przez nietoperze dziupli C_1 jest wystarczająca osobniki nie oddalają się od kryjówki i pożywiwszy się do niej wracają.
2. Jeżeli zaczyna brakować pożywienia, nietoperze coraz bardziej oddalają się od dziupli C_1 . Początkowo nie przenoszą się do innej kryjówki nawet w przypadku znalezienia odpowiedniej do zasiedlenia dziupli. Oznaczmy ją C_2 . W okolicy dziupli C_2 , ze względu na jej zbyt bliskie położenie w stosunku do dziupli C_1 , może bowiem również brakować pożywienia odpowiedniego dla danego gatunku nietoperzy.
3. W miarę pogarszania się dostępności pożywienia w okolicy aktualnej kryjówki niektóre osobniki oddalają się coraz bardziej od dziupli i jeden z nich natrafia na nadającą się do zasiedlenia kryjówkę w dalszej odległości od aktualnie zajmowanej dziupli. Oznaczmy ją C_3 . Z uwagi na dostatecznie dużą odległość tej dziupli od aktualnej kryjówki C_1 w jej sąsiedztwie nie brakuje pożywienia odpowiedniego dla danego gatunku nietoperzy.

4. Osobnik oznaczony L , który natrafił na dziuplę C_3 , nie wraca już do poprzednio zajmowanej kryjówki, ale wybiera nową kryjówkę jako miejsce swojego schronienia i od tego momentu do niej powraca.
5. Pozostałe osobniki reprezentowane przez osobnika oznaczonego N , wykorzystując informacje od osobnika L coraz bardziej się do niego zbliżają i kolejno przenoszą się do nowej kryjówki, co jest opisane drugim równaniem układu (1.1).

1.3. Model i punkty stałe odwzorowań nieliniowych. Celem niniejszej pracy jest wprowadzenie modelu matematycznego opisującego proces wyszukiwania dziupli przez nietoperze. Proces ten został opisany przez układ dynamiczny z czasem dyskretnym postaci

$$(1.1) \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= rx_n \min\{x_n, 1 - x_n\} \\ |y_{n+1} - x_{n+1}| &= \alpha|y_n - x_n| \end{aligned}$$

z warunkami początkowymi

$$(1.2) \quad x(0) = x_0 \in [0, 1] \quad \text{oraz} \quad y(0) = y_0 \in [0, 1],$$

gdzie $r, \alpha \in \mathbb{R}$ są ustalonymi parametrami, $r \in (2, 3)$ oraz $\alpha \in (0, 1)$. Istotne znaczenie dla modelu mają własności punktów stałych funkcji występującej w pierwszym równaniu tego układu, bowiem są one ściśle związane z położeniem dziupli. Drugie równanie opisuje wyłącznie zbliżanie się nietoperza N do nietoperza L .

Zajmiemy się teraz wprowadzeniem podstawowych pojęć teorii układów dynamicznych wykorzystanych w przedstawionym modelu. Literatura tematu jest bardzo bogata i zawarta jest np. w monografiach [1, 2, 5, 7, 11, 17, 18] oraz artykułach [12, 13]. Skoncentrujemy się na tych rekurencjach, które opisywane są poprzez iteracje:

$$(1.3) \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

gdzie odwzorowanie $f: I \rightarrow I \subset \mathbb{R}$ i $x_0 \in I$ jest daną wartością początkową. Wzór (1.3) wyraża fakt, że kolejny stan jest określony wyłącznie przez stan bezpośrednio go poprzedzający.

Kolejne stany można również wyznaczać jako iteracje stanu początkowego

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1) = f^2(x_0), \quad \dots, \quad x_n = f^n(x_0).$$

Zbiór $\{f^n(x_0), n \in \mathbb{N}\}$ nazywamy orbitą (trajektorią) punktu x_0 .

Należy podkreślić, że zależność (1.3) jest podstawowym modelem wielu zagadnień ewolucji w dyskretnym czasie. W przypadku jednowymiarowych odwzorowań ciąg (x_n) łatwo można konstruować graficznie.

Definicja 1.1 ([6]). Punkt c należący do dziedziny funkcji f nazywamy punktem równowagi równania (1.3), jeżeli jest on punktem stałym funkcji f , to znaczy $c = f(c)$.

Istnienie punktu stałego zapewnia następujące twierdzenie, które zostanie wykorzystane w naszych rozważaniach

Twierdzenie 1.2. Niech I będzie przedziałem domkniętym i niech $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Jeżeli $f(I) \supset I$, to funkcja f ma punkt stały.

Twierdzenie powyższe jest natychmiastowym wnioskiem z Twierdzenia 2 str. 66 z pozycji [18].

Definicja 1.3 ([6]). Niech c będzie punktem równowagi równania (1.3).

- 1) Punkt równowagi c jest stabilny, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$|x_0 - c| < \delta \Rightarrow |f^n(x_0) - c| < \varepsilon \text{ dla każdego } n > 0.$$

Jeżeli punkt c nie jest stabilny to nazywamy go niestabilnym.

- 2) Punkt równowagi c nazywamy punktem odpychającym (repulsorem) (*ang. source*) jeżeli istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że

$$0 < |x_0 - c| < \varepsilon \Rightarrow |f(x_0) - c| > |x_0 - c|,$$

albo równoważnie

$$0 < |x_0 - c| < \varepsilon \Rightarrow |x(1) - c| > |x_0 - c|.$$

- 3) Punkt równowagi c nazywamy punktem asymptotycznie stabilnym (atraktorem albo punktem przyciągającym) (*ang. sink*) jeśli jest stabilny i istnieje $\eta > 0$ takie, że

$$|x_0 - c| < \eta \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = c.$$

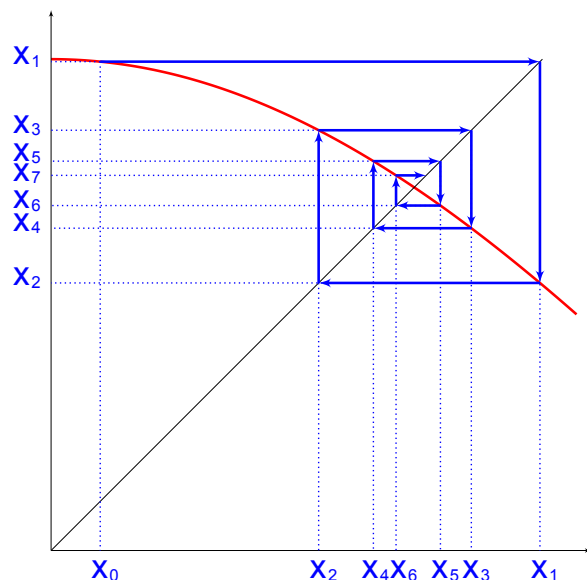
Jeżeli $\eta = \infty$ to mówimy, że c jest globalnie asymptotycznie stabilny.

Jeżeli odwzorowanie f jest ciągłe i ma ciągłą pochodną (jest klasy C^1), to znane są kryteria pozwalające rozstrzygnąć, czy dany punkt równowagi równania (1.3) jest punktem przyciągającym czy punktem odpychającym. W zależności od wartości pierwszej pochodnej funkcji f w punkcie równowagi c rozróżnia się dwa przypadki: $|f'(c)| \neq 1$ oraz $|f'(c)| = 1$. Jeżeli dla danego punktu c zachodzi warunek $|f'(c)| \neq 1$, to c nazywamy punktem równowagi typu hiperbolicznego. W przeciwnym przypadku punkt c nazywamy punktem równowagi typu niehiperbolicznego. Zajmiemy się wyłącznie pierwszym przypadkiem (hiperbolicznym) ponieważ w naszym modelu wszystkie trzy punkty równowagi badanego równania są punktami typu hiperbolicznego. Poniższe twierdzenie pozwala stwierdzić, czy punkt równowagi typu hiperbolicznego jest atraktorem czy repulsorem.

Twierdzenie 1.4 ([6]). Niech c będzie punktem równowagi równania (1.3), gdzie f jest klasy C^1 , przynajmniej na pewnym otoczeniu punktu c . Wtedy:

- a) jeżeli $|f'(c)| < 1$, to punkt c jest asymptotycznie stabilny (atraktor);
 b) jeżeli $|f'(c)| > 1$, to punkt c nie jest stabilny; w tym przypadku c jest punktem odpychającym (repulsor).

Prostą metodą graficznej oceny, czy punkt stały danego odwzorowania jest punktem przyciągającym czy punktem odpychającym jest wykres pajęczynowy. W układzie współrzędnych rysujemy wykres funkcji $y = f(x)$ oraz prostą $y = x$. Na osi odciętych zaznaczamy punkt x_0 i prowadzimy w tym punkcie prostą prostopadłą do osi odciętych aż do punktu przecięcia się z wykresem funkcji $y = f(x)$. Następnie, z tak otrzymanego punktu przecięcia, prowadzimy prostą równoległą do osi odciętych aż do punktu przecięcia z prostą $y = x$. Z tego punktu prowadzimy prostą prostopadłą do osi odciętych aż do punktu przecięcia prostej z wykresem funkcji f . Postępowanie powtarzamy wielokrotnie, do wyznaczenia żądanej wielkości x_n . Opisany proces został zilustrowany na rysunku 2.



RYSUNEK 2. Wykres pajęczynowy, punkt przyciągający

1.4. **Analiza własności trzech punktów stałych funkcji występującej w pierwszym równaniu układu (1.1).** Niech $I = [0, 1]$ i niech $f: I \rightarrow I$ będzie dana wzorem

$$(1.4) \quad f(x) = rx \min\{x, 1 - x\},$$

(1.5) gdzie r jest ustaloną liczbą rzeczywistą z przedziału $(2, 3)$.

Aby znaleźć punkty stałe tej funkcji rozwiązujemy równanie $x = f(x)$. Stąd, funkcja f ma trzy punkty stałe: $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{r}$ oraz $c_3 = \frac{r-1}{r}$. Wobec warunku (1.5) mamy $c_1, c_2, c_3 \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$. Geometrycznie są to odcięte punktów przecięcia wykresu funkcji f z dwusieczną kąta xOy (patrz rysunek 3). Zapiszmy funkcję f w postaci

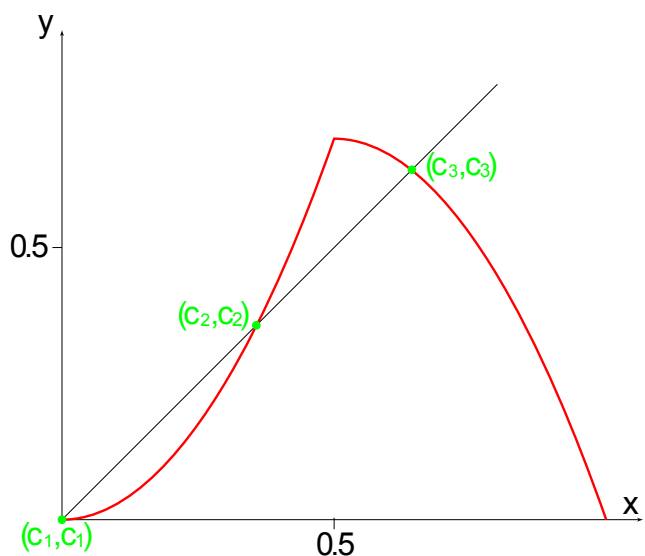
$$(1.6) \quad f(x) = \begin{cases} rx^2 & \text{dla } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ rx(1-x) & \text{dla } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Funkcja f jest klasy C^1 na zbiorze $(0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$. Stąd

$$(1.7) \quad f'(x) = \begin{cases} 2rx & \text{dla } x \in (0, \frac{1}{2}), \\ -2rx + r & \text{dla } x \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

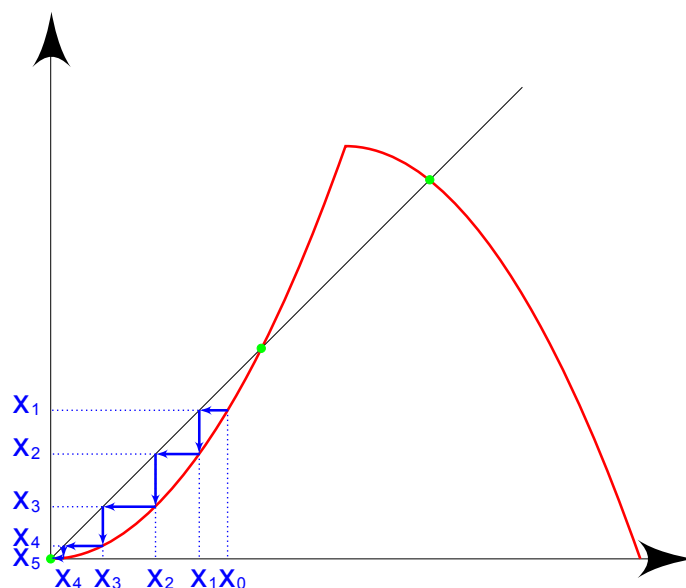
Ponieważ mamy

- $|f'(c_1)| = 0 < 1$, stąd punkt c_1 jest punktem przyciągającym;
- $|f'(c_2)| = 2 > 1$, stąd punkt c_2 jest punktem odpychającym;
- $|f'(c_3)| = |2 - r| < 1$, stąd punkt c_3 jest punktem przyciągającym.

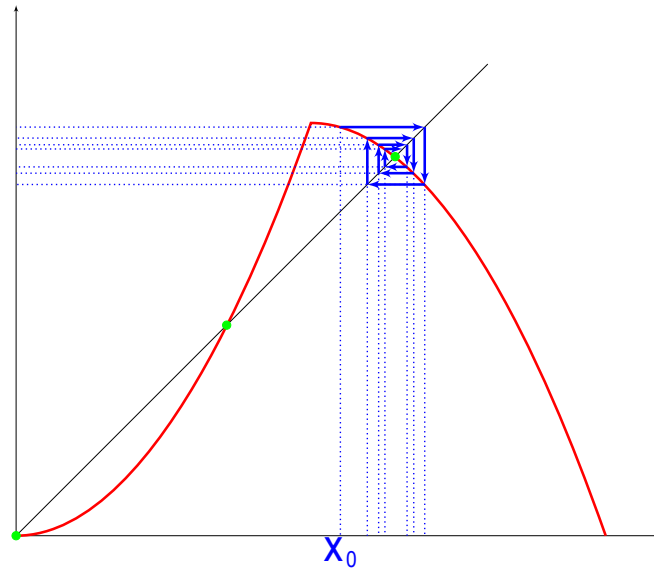
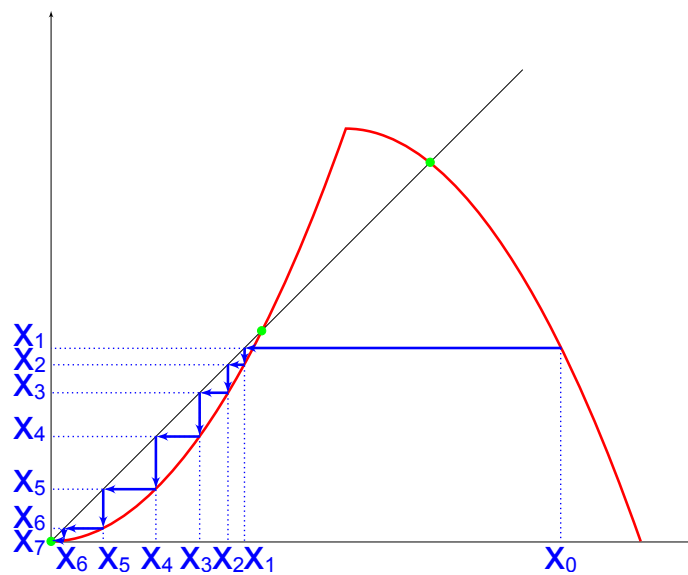


RYSUNEK 3. Punkty stałe funkcji f

1.5. **Interpretacja geometryczna.** Punkty stałe funkcji f danej wzorem (1.4) można też łatwo znaleźć geometrycznie. Są to odcięte punktów przecięcia wykresu funkcji f i prostej $y = x$ (patrz rysunek 3). Na kolejnych rysunkach pokazano, przy pomocy wykresu pajęczynowego, że punkty o odciętych $c_1 = 0$ oraz $c_3 = \frac{r-1}{r}$ są punktami przyciągającymi (rysunki 4 i 5) a punkt o odciętej $c_2 = \frac{1}{r}$ jest punktem odpychającym (rysunki 6 i 7).

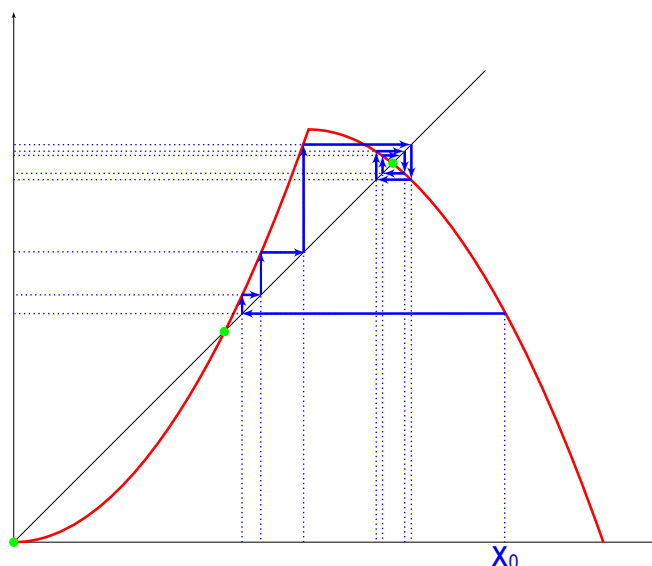


RYSUNEK 4. Punkt przyciągający c_1 ($x_0 = 0.30$)

RYSUNEK 5. Punkt przyciągający c_3 ($x_0 = 0.55$)RYSUNEK 6. Punkt odpychający c_2 (oraz punkt przyciągający c_1), ($x_0 = 0.86$)

2. BIOLOGICZNA INTERPRETACJA MODELU

Niech będzie dany układ równań (1.1) z warunkiem początkowym (1.2). W chwili $n = 0$ nietoperze zamieszkują dziupłę C_1 odpowiadającą punktowi przyciągającemu c_1 . Pozostałe dostępne dla nietoperzy dziuple znajdują się w punktach stałych funkcji f opisanej wzorem (1.4) (wykorzystanej w pierwszym równaniu układu (1.1)). Dziupła C_2 odpowiada punktowi odpychającemu c_2 a dziupła C_3 punktowi przyciągającemu c_3 .



RYSUNEK 7. Punkt odpychający c_2 (oraz punkt przyciągający c_3), ($x_0 = 0.81$)

Pierwsze równanie układu (1.1) opisuje orbitę nietoperza L , który jako pierwszy przenosi się do nowej dziupli. Jeżeli odlatuje on na niewielką odległość od dziupli C_1 , to zawsze do niej powraca. Równanie (1.4) opisujące trasę jego lotu ma w punkcie c_1 punkt przyciągający. Jeżeli nietoperz L odlatuje na dalszą odległość, to mimo, że mija dziuplę nadającą się do zamieszkania, oznaczoną C_2 , nie wybiera tej kryjówki, gdyż ze względu na jej zbyt bliskie położenie w stosunku do dziupli C_1 , może i w jej sąsiedztwie brakować pożywienia odpowiedniego dla danego gatunku nietoperzy. Równanie (1.4) ma w punkcie c_2 punkt odpychający. Przy dalszych lotach nietoperz L znajduje następną odpowiednią dla niego kryjówkę oznaczoną C_3 . W punkcie c_3 funkcja (1.4) ma punkt przyciągający. W zależności od tego jak daleko od dziupli C_1 znajduje się w danej chwili nietoperz L wraca on do C_1 albo zasiedla nową dziuplę C_3 .

Drugie równanie układu (1.1) opisuje orbity pozostałych nietoperzy - współmieszkańców dziupli C_1 . Położenie tych nietoperzy, oznaczonych N^i , gdzie i oznacza i -tego nietoperza w kolonii, w chwili $n + 1$ jest uwarunkowane położeniem obu nietoperzy L oraz N^i w chwili n . Mimo, że drugie równanie układu odnosi się do wszystkich osobników N^i , z uwagi na analogiczny przebieg ich orbit interesuje nas orbita tylko jednego z nich, oznaczyliśmy go N . Jego położenie w chwili n jest określone przez y_n . Z uwagi na to, że nietoperze mogą się komunikować między sobą, nietoperz N zbliża się w kolejnych chwilach do nietoperza L wiedząc, że znalazł on nową kryjówkę C_3 . Współczynnik α występujący w drugim równaniu układu (1.1) implikuje $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0$, co odpowiada zbliżaniu się nietoperzy jeden do drugiego w kolejnych chwilach n . Od momentu gdy dziupla C_3 staje się dziuplą zamieszkałą przez nietoperze, cały proces poszukiwania nowej kryjówki rozpoczyna się od nowa.

Podkreślić tu należy, że przedstawiony model spełnia przyjęte w punktach 1–5 założenia modelu.

3. PODSUMOWANIE

Przedstawiony model matematyczny opisujący zachowanie nietoperzy przenoszących się do nowej kryjówki stanowi pierwszą próbę autorów stworzenia matematycznego opisu tego zjawiska. W znanej nam literaturze nie pojawiły się żadne modele tego typu dotyczące nietoperzy zamieszkujących dziuple. Model został opracowany na podstawie dostępnej literatury dotyczącej zachowań nietoperzy zamieszkujących Puszcę Białowieską. Inspirację do jego powstania było seminarium „Czy modelowanie może pomóc w zrozumieniu zachowań nietoperzy?”, które odbyło się 26 marca 2014 roku na Wydziale Informatyki Politechniki Białostockiej. Podczas seminarium dr hab. Ireneusz Ruczyński, zoolog zajmującym się badaniem nietoperzy (chiropterologią), na przykładzie eksperymentów przeprowadzonych na nietoperzach w warunkach terenowych i laboratoryjnych przybliżył słuchaczom strategię zachowań nietoperzy i związku pomiędzy środowiskiem, socjalnością i transferem informacji u nietoperzy. Omówione zostały sytuacje, w których modelowanie może pomóc przewidzieć lub zrozumieć zachowania nietoperzy.

LITERATURA

- [1] K.T. Alligood, T.D. Sauer, J.A. Yorke, *CHAOS An Introduction to Dynamical Systems*, Springer 2000.
- [2] D. Bobrowski, *Wprowadzenie do systemów dynamicznych z czasem dyskretnym*, UAM, Poznań, 1998.
- [3] W. Bogdanowicz, I. Ruczyński, *Jak mieszkają nietoperze, dom dla nocnego marka*, Panorama Chiropterologia 4(4):4–8, 2005.
- [4] P. Cull, M. Flahive, R. Robson, *Difference Equations, From Rabbits to Chaos*, Springer, 2005.
- [5] R.L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Benjamin/Cummings, Menlo Park CA, 1986.
- [6] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, Springer, 2005.
- [7] S. Elaydi, *Discrete Chaos, Second Edition: With Applications in Science and Engineering*, Chapman and Hall/CRC, 2007.
- [8] T. Feder, *Statistical Physics is for the Birds*, Physics Today 60(10):28–30, 2007.
- [9] U. Foryś, *Matematyka w biologii*, Wydawnictwa Naukowo–Techniczne, 2005.
- [10] D. Franco, F.M. Hilker, *Adaptive Limiter Control of Unimodal Population Maps*, Journal of Theoretical Biology 337:161–173, 2013.
- [11] V. Kolmanovskii, A. Myshkis, *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*, Springer, 1999.
- [12] M. Misiurewicz, J. Šmítal, *Smooth Chaotic Maps With Zero Topological Entropy*, Ergodic Theory Dyn. Syst. 8:421–424, 1988.
- [13] T.J. Li, J.A. Yorke, *Period Three Implies Chaos*, Amer. Math. Monthly 82:985–992, 1975.
- [14] G.R. Martin, *The Eye of a Passeriform Bird, the European Starling (Sturnus vulgaris): eye movement amplitude, visual fields and schematic optics*, J. Comp. Physiol. A 159:545–557, 1986.
- [15] I. Ruczyński, *Rola zmysłów, transferu informacji i zdolności poznawczych w wyszukiwaniu schronień u nietoperzy*, Autoreferat, Białowieża, 2013.
- [16] I. Ruczyński, K.A. Bartoń, *Modelling Sensory Limitation: The Role of Tree Selection, Memory and Information Transfer in Bats' Roost Searching Strategies*, PLoS ONE 7(9): e44897Link, DOI: doi:10.1371/journal.pone.0044897.
- [17] H. Sedaghat, *Nonlinear Difference Equations: Theory with Applications to Social Science Models*, Springer 2003.
- [18] J. Šmítal, *On Functions and Functional Equations*, CRC Press, 1988.
- [19] P.N.V. Tu, *Dynamical Systems: an Introduction with Applications in Economics and Biology*, Springer–Verlag, 1994.
- [20] P. Sah, J.P. Salve, S. Dey, *Stabilizing Biological Populations and Metapopulations Through Adaptive Limiter Control*, Journal of Theoretical Biology 320:113–123, 2013.
- [21] A.N. Szarkowski, *Coexistence of Cycles of a Continuous Mapping of the Line Into Itself*, (Russian), Ukrain. Mat. Z. 16:61–71, 1964.

- [22] *Czynniki kształtujące wybór i użytkowanie kryjówek przez nietoperze w Puszczy Białowieskiej*, Instytut Biologii Ssaków PAN w Białowieży, <http://www.zbs.bialowieza.pl/arttykul/18.html>
- [23] Patrz również: <http://bunkry.nazwa.pl/pl/nietoperze.html>
- [24] Patrz również: <http://www.polskiwilk.org.pl/nietoperze>
- [25] Nietoperze. Wikipedia, wolna encyklopedia. 5 paź 2014, 11:17 UTC. Wikimedia Foundation, Inc. 22 gru 2014, <http://pl.wikipedia.org/wiki/Nietoperze>
- [26] Zdjęcie Borowiec. Źródło: Stacja Morska IO UG w Helu (www.hel.ug.edu.pl), Foto: Anna Biała.

EWA GIREJKO
POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA
Adres e-mail: e.girejko@pb.edu.pl

ROBERT JANKOWSKI
POLITECHNIKA ŁÓDZKA
Adres e-mail: rjjankowski@math.uwb.edu.pl

EWA SCHMEIDEL
UNIwersytet w Białymstoku
Adres e-mail: eschmeidel@math.uwb.edu.pl