

ELEMENTARNA MATEMATYKA ZA KULISAMI PROMOCJI

DOROTA GABOR I GRZEGORZ GABOR

STRESZCZENIE. Artykuł opisuje rzeczywiste doświadczenia autorów we współtworzeniu pewnej promocji, która pojawiła się na rynku w 2009 roku i, ponieważ w opinii organizatora i zleciodawcy odniosła sukces, doczekała się kolejnych edycji. Z powodu zobowiązań autorów wobec firmy organizującej promocję dokładnie opisane mogą być tylko algorytmy zastosowane w już zakończonych edycjach.

1. WSTĘP

Ekonomia, która w dużej mierze opisuje funkcjonowanie podmiotów na rynku, mimo korzystania z aparatu matematycznego, umiejscowiona jest w obszarze nauk społecznych, gdyż uwzględniać musi różnego rodzaju społeczne zachowania. Na wybór konsumenta, jego preferencje, na postępowanie konkurujących producentów mają wpływ nie tylko takie względy jak użyteczność koszyków dóbr, cena i jakość, ale też działania marketingowe i atrakcyjność promocji, trafiających w oczekiwania społeczne (por. [2]). Producenci starają się wybrać taką formę promocji, która nie tylko będzie atrakcyjna wizualnie lub dźwiękowo, lecz wzbudzi rzeczywiste zainteresowanie potencjalnych klientów. Do takich form promocji zaliczają się różnego typu loterie. Ich wielość spotykana obecnie na rynku podnosi wymagania firmom zajmującym się promocjami, które poszukują wciąż nowych, ciekawych pomysłów.

W ostatnich latach podejmowane są słuszne działania popularyzujące matematykę i nauki ścisłe. Inicjują je nie tylko ministerstwa odpowiedzialne za edukację i badania naukowe, ale także sami nauczyciele i naukowcy oraz różnego rodzaju towarzystwa, mające na celu krzewienie kultury matematycznej. Dobrym przykładem pokazującym w sposób elementarny obecność matematyki w naszym codziennym życiu jest książka Stevena Strogatza [4], ale jest też wiele innych książek popularnonaukowych ukazujących piękno matematyki. Nic nie stoi na przeszkodzie, by w tym dobrym klimacie społecznym matematyka, często nietrudna, pojawiła się także w akcjach promocyjnych, stających się w pewnym sensie zabawą dla osób biorących w nich udział. O jednym z przykładów promocji z matematyką w tle, konkretnie wprowadzonej na rynek, cieszącej się dużym zainteresowaniem i mającej kolejne wznowienia, mówi poniższy artykuł.

Zdajemy sobie sprawę, że algorytmy podane w tym artykule mogą być modyfikowane i wzbogacane w różny sposób. Ponieważ jednak jedna z takich modyfikacji została zastosowana w kolejnej edycji promocji obecnie uruchamianej na rynku, a inne, które są nam znane, mogą być użyte w kolejnych edycjach, niniejsze opracowanie odsłania jedynie kulisy tych promocji, które zostały już zakończone (2009 i 2010). Celem tej pracy nie jest więc przedstawienie kompletnego rozwiązania problemu, z jakim się zetknęliśmy, ale podzielenie się, ciągle rzadkimi w pracy matematyka, doświadczeniami współpracy.

Przedstawiamy tu pokrótce wszystkie etapy procesu powstawania projektu, jego wykonania oraz realizacji w praktyce, a także kilka ciekawych informacji o tym, z jakim odbiorem spotkała się akcja promocyjna wśród klientów i internautów. Rozdział 2 obejmuje krótki opis etapu wstępnego, w którym nie braliśmy udziału. W całym procesie jest on jednak bardzo ważny, by końcowy efekt odpowiadał pierwotnym oczekiwaniom i zapotrzebowaniu rynku. Kolejny rozdział opisuje te etapy, w które bezpośrednio zostaliśmy zaangażowani i wykorzystaliśmy nasze matematyczne doświadczenie. W rozdziale 4 przedstawiamy etap realizacji, a w 5 opisujemy ciekawe reakcje, z którymi spotkała się akcja promocyjna.

2. OD OCZEKIWAŃ ZLECENIODAWCY DO POMYSŁU ORGANIZATORA PROMOCJI

W pierwszym etapie przygotowania promocji zleceniodawca, który chce zwiększyć zainteresowanie klientów jakimś produktem, określa ilość środków przeznaczonych na wygrane, ilość np. opakowań promocyjnych, grupę klientów, do których kieruje promocję i ewentualne inne oczekiwania. Z tym zwraca się do organizatora promocji, który opracowuje koncepcję i czuwa nad realizacją promocji.

W opisywanym przez nas przypadku producent zup błyskawicznych postanowił zwiększyć zainteresowanie klientów swoimi produktami, wprowadzając na rynek 32 mln opakowań promocyjnych biorących udział w loterii, w której na nagrody przeznaczonych miało być 200 000 zł. Firmą, która podjęła się przygotowania i realizacji promocji była spółka Playprint Polska Sp. z o.o. [7]

Rozpoczął się etap znalezienia pomysłu na promocję, który byłby nie tylko skuteczny, ale też atrakcyjny dla potencjalnych graczy. Najogólniejszy opis pierwszej koncepcji jest następujący:

W każdym z 32 000 000 opakowań znajdować się będzie kupon z wypisaną kwotą. Jeśli ktoś zgromadzi kupony, na których kwoty zsumują się dokładnie do 1000 zł lub 10 000 zł, to może wymienić je na gotówkę.

Zwróćmy uwagę na to, że klient znajdując w opakowaniu kupon z liczbą np. 275 widzi, że „potencjalnie” ma już zebranych 275 zł, co może go skłonić do zakupu kolejnych opakowań. Nawet jeśli przekroczy kwotę 1000 zł, nie zsumowawszy do pełnego tysiąca, może zbierać „pieniądze” dalej, próbując z większej puli liczb uskładać wygrywające kwoty.

W celu zwiększenia atrakcyjności loterii, organizator założył, że kupony zawierać będą liczby co najmniej trzycyfrowe. Aby zmieścić się w ograniczeniach określonych przez zleceniodawcę, organizator zaplanował wstępnie np.

10 wygranych po 10 000 zł i 100 wygranych po 1000 zł,
co da w sumie $10 \cdot 10000 + 100 \cdot 1000 = 200000$ zł.

Aby uzyskać większą nietrywialność promocji i bardziej zaciekać klientów, określono, że powinno być stosunkowo dużo różnych kwot (im więcej, tym lepiej, ale przynajmniej 150).

Problem, który pozostał do rozwiązania to: jak zaplanować kwoty na kuponach i liczbę kuponów z odpowiednimi kwotami, aby zrealizować powyższe zamierzenia.

3. OD POMYSŁU NA PROMOCJĘ DO ROZWIĄZANIA PROBLEMU

Przedstawiciel firmy przygotowującej promocję zwrócił się do nas z prośbą o pomoc w rozwiązaniu problemu, oczekując raczej kontaktu z informatykami, którzy napisaliby program generujący odpowiednie kwoty. Okazało się to jednak niepotrzebne.

W rozdziale tym opisujemy, jak rodziło się rozwiązanie mające zadowolić zarówno nas, jako matematyków, jak i specjalistów od promocji. Ciekawym doświadczeniem było dla nas zderzenie ocen jakości rozwiązania z tych dwóch punktów widzenia.

Pierwsze nasze pytanie brzmiało: Czy można zmienić wysokość wygranych? Po twierdzącej odpowiedzi zaproponowaliśmy natychmiast dwa rozwiązania.

ROZWIĄZANIE 1. Zamienić wygrane na np. 999 i 9999 lub 1001 i 10001, wydrukować odpowiednią ilość kwot nieparzystych, a pozostałe parzyste. Wygrana umożliwia wylosowanie kwoty nieparzystej.

ROZWIĄZANIE 2. Przy wygranych np. 1001 i 10001 wydrukować odpowiednią ilość kwot dających z dzielenia przez 3 resztę 2, a pozostałe podzielne przez 3. Wygrana umożliwia wylosowanie kwoty dającej resztę 2.

Oba rozwiązania mają jednak wady. Przede wszystkim ten sam kupon może umożliwić zarówno małą, jak i dużą wygraną, więc, aby zmieścić się w warunkach podanych przez zleceniodawcę, trzeba zakładać, że wszystkie liczby nieparzyste w rozwiązaniu 1 lub dające z dzielenia przez 3 resztę 2 w rozwiązaniu 2 umożliwią dużą wygraną. Zatem „losów wygrywających” musi być stosunkowo mało (tzn. 20). Tę wadę można zlikwidować, rezygnując z dużych wygranych (wtedy „losów wygrywających” może być 200), ale to podobno znacznie osłabia atrakcyjność promocji. Dodatkowo w opinii specjalistów od promocji takie wygrane są „brzydsze” niż 1000 i 10000, a poza tym, co istotne, odbiorcy zbyt łatwo rozszyfrują, na czym loteria polega.

Na tym zakończyła się pierwsza rozmowa. Problem nas jednak zaintrygował i tego samego wieczoru opracowaliśmy inną propozycję w dwóch wariantach, która była pozbawiona wszystkich opisanych wyżej wad, a przy tym w pełni realizowała oczekiwania zleceniodawcy. Oto ona:

W każdym opakowaniu promocyjnym wydrukowana jest pewna kwota. Jeśli suma zebranych kwot będzie równa **DOKŁADNIE** 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000 lub 10000 zł, to zostanie wymieniona na równowartość w gotówce.

Zmieniliśmy więc znów nieco założone zasady promocji, ale tym razem zwiększyło to jej atrakcyjność. Kolejne dwa rozwiązania dokładnie opisują warianty naszej propozycji.

ROZWIĄZANIE 3. Zauważmy, że dla $n \in \{1, \dots, 10\}$

$$(3.1) \quad n \cdot 1000 \equiv (11 - n) \pmod{11},$$

gdzie zapis $a \equiv b \pmod{11}$ oznacza *relację kongruencji* między liczbami a i b (por. [3], rozdz. IV, par.1) zdefiniowaną następująco: liczby a i b przystają do siebie według modułu 11 (w skrócie: modulo 11), jeżeli ich różnica jest liczbą podzielną przez 11.

Rzeczywiście, niech n będzie pewną liczbą ze zbioru $\{1, \dots, 10\}$. Wówczas

$$\begin{aligned} n \cdot 1000 &= n \cdot (990 + 11 - 1) = n \cdot 90 \cdot 11 + (n - 1) \cdot 11 + 11 - n \\ &\equiv (11 - n) \pmod{11}, \end{aligned}$$

gdyż $[n \cdot 90 \cdot 11 + (n - 1) \cdot 11 + 11 - n] - [11 - n] = n \cdot 90 \cdot 11 + (n - 1) \cdot 11$ jest liczbą podzielną przez 11.

Zatem

- Suma żadnej ilości kwot podzielnych przez 11 nie zapewnia wygranej (gdyż, jak wynika z równości 3.1, wielokrotności $n \cdot 1000$ dla $n \in \{1, \dots, 10\}$ nie dają z dzielenia przez 11 reszty 0).
- Konkretną wygraną od 1000 zł do 10000 zł umożliwia jedynie wystarczająco niska kwota dająca odpowiednią resztę z dzielenia przez 11 (np. wygraną 7000 zł - kwota dająca resztę 4, gdyż $7000 = 7 \cdot 1000 \equiv (11 - 7) \pmod{11}$, por. 3.1).
- Wystarczy dowolnie zaplanować ilość wygranych każdej wielkości spośród 1000, 2000, 3000, ..., 10000 w ramach puli 200 000 zł, wydrukować odpowiednią ilość kuponów z kwotami umożliwiającymi wygrane („losy wygrywające”), a na pozostałych - kwoty podzielne przez 11.

ROZWIĄZANIE 4. Zauważmy, że dla $n \in \{1, \dots, 10\}$

$$n \cdot 1000 = n \cdot 990 + n \cdot 10 = (n \cdot 90) \cdot 11 + n \cdot 10.$$

Zatem

- Suma żadnej ilości kwot podzielnych przez 11 nie zapewnia wygranej.
- Wygraną $n \cdot 1000$ zł umożliwia jedynie n odpowiednio niskich kwot dających z dzielenia przez 11 liczbę 10.
- Wystarczy wydrukować 200 trzycyfrowych kwot dających z dzielenia przez 11 resztę 10 („losy wygrywające”), a pozostałe kwoty powinny być podzielne przez 11. Łączna suma wygranych mieści się w puli, choć nie można zaplanować, ile jakich wygranych padnie.

Zauważmy ponadto, że liczb trzy- i czterocyfrowych podzielnych przez 11 jest ponad 800, czyli wystarczająco dużo, by spełnić oczekiwania organizatora promocji. Należy sobie jednak zdawać sprawę, że posiadanie „losu wygrywającego” nie zapewnia wygranej, lecz tylko ją umożliwia, zatem szanse wygrania są mniejsze niż przy tradycyjnej loterii.

Porównanie obu wariantów rozwiązania problemu pozwala stwierdzić, że:

- Do wygranej $n \cdot 1000$ w rozwiązaniu 3 wystarczy jeden „los wygrywający”, w rozwiązaniu 4 konieczne jest posiadanie n „losów wygrywających”.
- W rozwiązaniu 4 jest 200 „losów wygrywających”, w rozwiązaniu 3 znacznie mniej (zależy w jaki sposób zaplanuje się ilość poszczególnych wygranych).
- W rozwiązaniu 4 kolejny „los wygrywający” daje szansę na wyższą wygraną, w rozwiązaniu 3 może dodać szansę na niższą wygraną, np.

$$\begin{array}{ll} 4 \equiv 7000 \pmod{11}, & \text{tzn. kwota dająca resztę 4 umożliwia wygraną 7000;} \\ 6 \equiv 5000 \pmod{11}, & \text{tzn. kwota dająca resztę 6 umożliwia wygraną 5000;} \\ 4 + 6 \equiv 1000 \pmod{11}, & \text{tzn. kwoty dające reszty 4 i 6 umożliwiają wygrane} \\ & \text{1000, 7000, 5000.} \end{array}$$

Ostatnia równość wynika natychmiast z równości 3.1, ale też z przydatnego faktu dotyczącego kongruencji: jeżeli $a \equiv b \pmod{m}$ i $c \equiv d \pmod{m}$, to $a+c \equiv b+d \pmod{m}$ (por. [3], rozdz. IV, par. 1, własność IV). Rzeczywiście, $4+6 \equiv (7000+5000) \pmod{11} \equiv 1000 \pmod{11}$.

- Szanse wylosowania większej ilości „losów wygrywających” są w obu wariantach co najmniej kilkadziesiąt tysięcy razy mniejsze niż szanse wylosowania jednego, zatem w rozwiązaniu 4 szanse na wyższe wygrane (w tym na najwyższą) są znacznie mniejsze niż w rozwiązaniu 3.

Oczywiście łatwo zauważyć, że zaproponowane przez nas rozwiązania są szczególnym przypadkiem następującego algorytmu.

Zlecniodawca wskazuje liczbę Z - pulę przeznaczoną na wygrane i ewentualnie określa liczbę $N < Z$, którą nazwiemy podstawową wygraną (w opisywanej sytuacji $Z = 200000$, $N = 1000$).

Należy dobrać dzielnik M (u nas $M = 11$) tak, by największy wspólny dzielnik (por. [1], rozdz. II, par. 7) liczb N i M był równy 1 oraz

- W ROZWIĄZANIU 3 dopasować liczby $k_1, k_2, \dots, k_{M-1}$ tak, by

$$Z \geq k_1 \cdot N + k_2 \cdot 2N + \dots + k_{M-1} (M-1) \cdot N,$$

wtedy k_i jest liczbą określającą ilość kwot umożliwiających wygraną $i \cdot N$.

- W ROZWIĄZANIU 4 dobrać liczbę k tak, by

$$Z \geq kN,$$

wtedy k oznacza ilość „losów wygrywających”.

Oczywiście, formułując zasady promocji, można proponować tylko niektóre wielokrotności podstawowej wygranej. Na przykład w drugiej edycji opisywanej promocji (2010 r.) zastosowano dzielnik $M = 13$ i wygrane od 1000 do 10000, jak poprzednio, choć można byłoby dopuścić również wygrane równe 11000 i 12000 zł.

Warto jeszcze wspomnieć, że przy $M = 11$ można łatwo sprawdzać, czy wylosowana kwota jest liczbą podzielną przez 11 dzięki cesze podzielności przez 11, nietrudnej lecz mało znanej (por. [1], Twierdzenie 6.9): jeśli liczba n jest zapisana w systemie dziesiętnym za pomocą cyfr $c_k, \dots, c_0$, licząc od lewej, i $S(n)$ jest sumą liczb dwucyfrowych $c_{2i+1}c_{2i}$, $0 \leq i < \frac{k}{2}$, i ewentualnie pozostałej liczby jednocyfrowej c_k , to n jest podzielna przez 11 wtedy i tylko wtedy, gdy $S(n)$ jest podzielna przez 11. Inną cechę podzielności przez 11, częściej stosowaną, można znaleźć na przykład w [3]. Mówi ona, że liczba n jest podzielna przez 11 wtedy i tylko wtedy, gdy po odjęciu od sumy cyfr stojących na miejscach parzystych sumy cyfr stojących na miejscach nieparzystych otrzymamy liczbę podzielną przez 11.

4. OD ROZWIĄZANIA DO REALIZACJI W PRAKTYCE

Biorąc pod uwagę opisanie wcześniej obserwacje, w obu dotychczas zakończonych edycjach promocji zdecydowano, że zastosowane zostanie rozwiązanie 3. Względy techniczne i doświadczenie organizatora promocji spowodowały następujące dostosowania rozwiązania do wdrożenia:

- Wybrano po jednej kwocie umożliwiającej wygraną w każdej wysokości.
- Kwoty umożliwiające wyższe wygrane pojawiły się w niewielkich ilościach (pojedynczo lub po kilka), kwota umożliwiająca podstawową wygraną (np. 560 w pierwszej edycji) pojawiła się ponad 100 razy.

- Wybrano odpowiednią ilość kwot podzielnych przez 11, przy czym zadbano o to, by wśród nich znalazły się takie, które łatwo uzupełniają kwoty umożliwiające wygrane, (np. 440, 220, 110 mogą łatwo uzupełnić 560).
- Kupony zawierające kwoty łatwo uzupełniające „losy wygrywające” stanowiły 10-20% wszystkich kuponów z kwotami podzielnymi przez 11 (lub 13 w drugiej edycji).

W kolejnej edycji zleceniodawca oczekiwał, by wygrane były kolejnymi wielokrotnościami $N = 100$ aż do 1000. Zastosowanie rozwiązania opisanego wyżej nie spełniałoby pewnych warunków. Wprowadzenie stosunkowo dużego dzielnika, np. 13 lub więcej, znacznie ogranicza ilość kwot będących jego wielokrotnościami, natomiast mniejsze dzielniki dodatkowo zmniejszają maksymalną wygraną. Konieczna była pewna modyfikacja rozwiązania, która przy zachowaniu maksymalnej wygranej 1000, umożliwiła zwiększenie ilości rodzajów kwot na kuponach. Wykorzystano do niej pośrednio pomysł jednego z uczestników warsztatów *Modelowanie matematyczne i współpraca interdyscyplinarna*, Gdańsk, 26-28.09.2013, organizowanych przez Centrum Zastosowań Matematyki na Wydziale Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej Politechniki Gdańskiej, który pojawił się w trakcie dyskusji. Jednak ujawnienie szczegółów tej modyfikacji będzie możliwe dopiero po zakończeniu edycji promocji, w której zostanie wykorzystana, czyli w listopadzie 2014.

5. REAKCJE NA PROMOCJĘ

Akcja promocyjna Amino Lotto [8, 9], którą tu opisujemy, spotkała się z dużym zainteresowaniem nie tylko klientów, kupujących zupy błyskawiczne, ale też, na przykład, internautów. Skupienie uwagi sporej grupy osób na samej loterii i jej regułach, a pośrednio na marce wprowadzającej na rynek produkt, powiększyło sukces całej promocji. Poniżej przedstawiamy kilka efektów akcji promocyjnej, jakie można było zauważyć w internecie.

W lipcu 2010 roku, czyli w miesiąc po uruchomieniu drugiej akcji promocyjnej, hasło „AMINOLOTTO 2010” można było znaleźć w przeglądarce internetowej ok. 1800 razy. Aminolotto gościło na 174 stronach przeróżnych grup dyskusyjnych. Internauci szukali najlepszych sposobów na wygraną, rozpracowywali zasady loterii i niektórzy z nich próbowali łączyć siły, aby uzyskać maksymalnie dużo wygranych. Na wielu stronach pojawiały się oferty sprzedaży saszetek (nawet 20 zł za saszetkę!) (por. [5]).

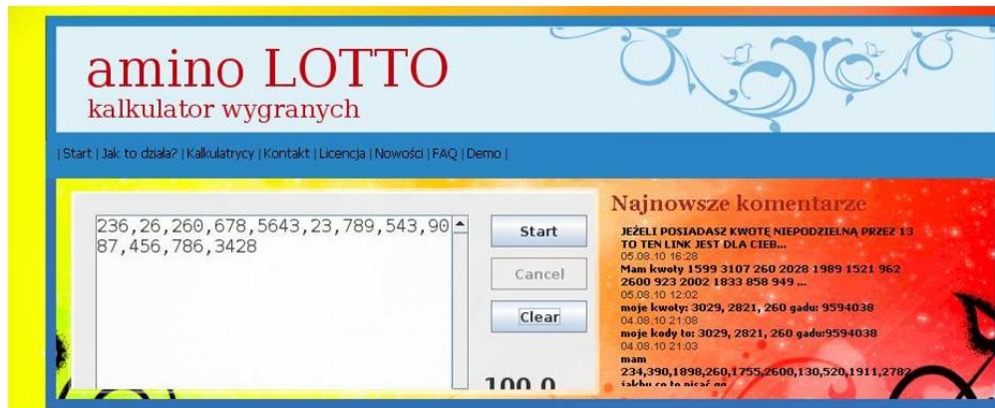
Do ciekawszych zjawisk związanych z loterią zaliczyć można powstanie dostępnych w sieci kalkulatorów wygranych, np. „Kalkulatracy”. Przygotowano nawet filmy instruktażowe posługiwania się kalkulatorem (por. [6]).

Stworzono, nieinspirowany przez organizatorów promocji, specjalny serwis alotto.destinier.com zrzeszający graczy w loterii. Niektórym specjalistom od promocji trudno było uwierzyć, by taki ruch w internecie powstał spontanicznie i nie był inicjowany lub wspomagany przez organizatorów. To jednak była prawda.

Ważne było to, że nawet odgadnięcie zasad loterii (w każdej z jej odsłon) nie obniżało zainteresowania promocją, a nawet mobilizowało do wspólnego zaangażowania i wymiany informacji.

Z puli nagród wypłacono 28% w pierwszej i 35% w drugiej edycji, co jest, według specjalistów, bardzo dobrym wynikiem i odzwierciedla duże zainteresowanie akcją promocyjną. Zazwyczaj wypłaty te są dużo niższe.

Podziękowania. Pragniemy podziękować mgr. Wojciechowi Koczorowskiemu z firmy Playprint Polska Sp. z o.o. za zainteresowanie nas problemem, zaproszenie do współpracy i zaufanie, a także



RYSUNEK 1. Przykład kalkulatora wygranych



RYSUNEK 2. Strona serwisu graczy

współtworzenie prezentacji podczas warsztatów *Modelowanie matematyczne i współpraca interdyscyplinarna*, Gdańsk, 26-28.09.2013. Wspólne tworzenie projektu łączącego elementarną matematykę i wymagania rynku było i jest dla nas bardzo ciekawym i ubogacającym doświadczeniem.

Dziękujemy również dr. hab. Grzegorzowi Graffowi z Politechniki Gdańskiej, który, mimo naszych oporów, wielokrotnie i wytrwale zachęcał nas do podzielenia się tym doświadczeniem.

LITERATURA

- [1] J. Gancarzewicz, *Arytmetyka*, Wyd. Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków, 2000.
- [2] P. Kotler, G. Armstrong, J. Saunders, V. Wong, *Marketing. Podręcznik europejski*, PWE, Warszawa, 2002.
- [3] W. Sierpiński, *Arytmetyka teoretyczna*, BM 7, Wyd. 2, PWN, Warszawa, 1959.
- [4] S. Strogatz, *Szczęśliwy X. Matematyka na co dzień*, Dom Wydawniczy PWN, 2014.
- [5] Strona internetowa:
http://polskastrefa.pl/opole/uslugi/nauka/sprzedam_szaszetki-amino_lotto,5lw0
- [6] Strona internetowa: <http://www.youtube.com/watch?v=qaIbDrB8UWY>
- [7] Strona internetowa: <http://www.playprint.pl>

[8] Strona internetowa: <http://www.playprint.pl/portfolio-view/amino-on-pack>

[9] <http://www.youtube.com/watch?v=Is4KEoyE6PA>

DOROTA GABOR

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI, UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA, UL. CHOPINA 12/18, 87-100
TORUŃ

Adres e-mail: dgabor@mat.umk.pl

GRZEGORZ GABOR

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI, UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA, UL. CHOPINA 12/18, 87-100
TORUŃ

Adres e-mail: ggabor@mat.umk.pl