Centrum Zastosowań Matematyki

ISBN 978-83-937569-7-1
PORTAL CZM 2015

MODELOWANIE CYKLI KONIUNKTURALNYCH PRZY POMOCY RÓWNAŃ RÓŻNICOWYCH

PIOTR HACHUŁA

STRESZCZENIE. Artykuł stanowi przegląd wybranych modeli cykli koniunkturalnych opisanych językiem matematycznym przy pomocy równań różnicowych. Pokazano jak aparat matematyczny może zostać wykorzystany przez ekonomistów do formułowania oraz analizowania modeli ekonomicznych. We wprowadzeniu przedstawiono zarys ekonomicznej teorii cykli koniunkturalnych oraz podstawowe modele ekonomiczne. W zasadniczej części pracy zostały przedstawione dwa modele: Samuelsona oraz Goodwina-Hicksa – ich założenia, sformułowanie w postaci układów równań różnicowych oraz analiza stabilności punktów stałych.

1. WPROWADZENIE

1.1. Teoria cykli koniunkturalnych.

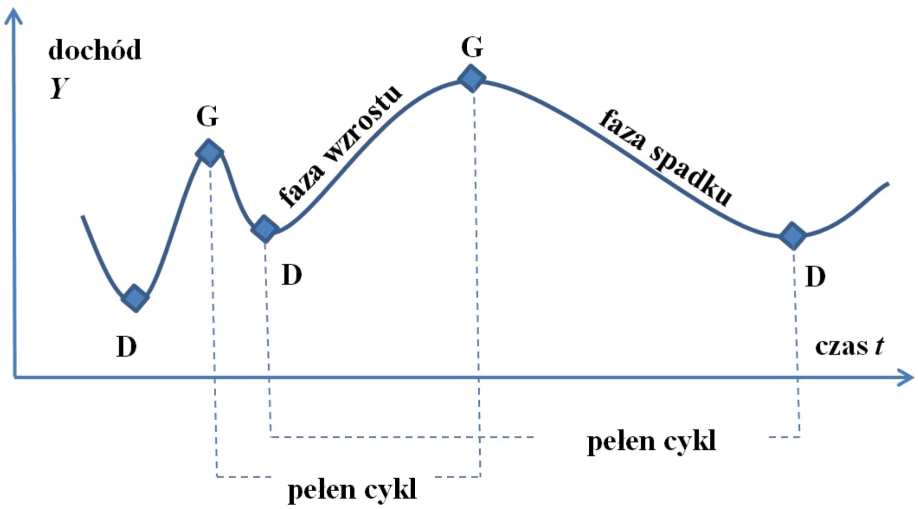
Definicja 1.1. Podając za [3] *cyklem koniunkturalnym* (gospodarczym) nazywamy powtarzające się, choć nie zawsze regularne pod względem długości i amplitudy wahania aktywności gospodarczej (koniunktury) w okresie od dwóch do dziesięciu, a nawet kilkunastu lat. Wahania te przejawiają się w zmianach absolutnych, odchyleniach od trendu lub wahaniach dynamiki (stopy wzrostu) różnych zmiennych ekonomicznych, które opisują poziom aktywności gospodarczej. Najczęściej tymi zmiennymi są: produkt krajowy brutto (PKB), zatrudnienie, ceny, wielkość eksportu i importu, wskaźniki rynku kapitałowego, nakłady inwestycyjne i zapasy, dochody i wydatki ludności, obroty i zyski przedsiębiorstw.

Zadaniem teorii cykli koniunkturalnych jest wyjaśnienie przyczyn periodyczności oraz powtarzalności przebiegu zdarzeń. W tym celu należy dokonać analizy elementów budowy cyklu koniunkturalnego, który jako proces gospodarczy o określonej dynamice zbudowany jest z dwóch podstawowych elementów: faz cyklu oraz punktów zwrotnych.

W cyklu koniunkturalnym wyróżniamy:

- górny punkt zwrotny,
- fazę spadku,
- dolny punkt zwrotny,

Pracę wykonano w ramach projektu Centrum Zastosowań Matematyki, współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



RYSUNEK 1. Fazy cyklu koniunkturalnego, oprac. własne na podstawie [3] str. 13

- fazę wzrostu.

Górny punkt zwrotny to punkt w danym cyklu, w którym gospodarka osiągnęła najwyższy poziom swej aktywności. Można go też interpretować jako początkowy punkt fazy spadku lub punkt kończący fazę wzrostu. Analogicznie dolny punkt zwrotny to moment w danym cyklu, w którym gospodarka osiągnęła najniższy poziom aktywności.

Poszczególne fazy cyklu koniunkturalnego zostały zaprezentowane na rysunku 1, na którym punkt G oznacza górny punkt zwrotny, a D – dolny punkt zwrotny. Pomiędzy punktami G i D występuje faza spadku, a od punktu D do G aktywność gospodarcza charakteryzuje się wzrostem gospodarczym. Pełny cykl koniunkturalny występuje pomiędzy dwoma kolejnymi górnymi lub dwoma kolejnymi dolnymi punktami zwrotnymi.

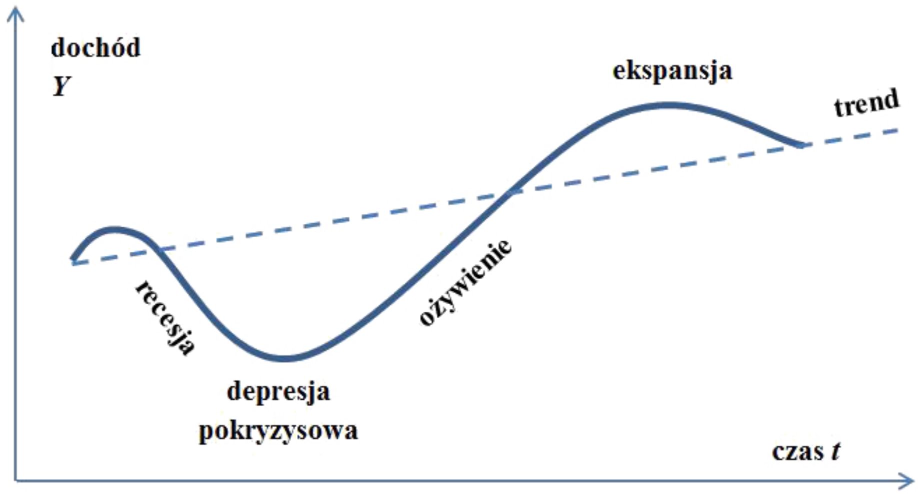
Klasyczny cykl koniunkturalny obejmuje cztery fazy:

- recesję,
- depresję pokryzysową,
- ożywienie,
- ekspansję.

Recesja jest przejawem spadku ogólnej działalności gospodarczej, przede wszystkim produkcji i zatrudnienia. *Depresja pokryzysowa* w cyklu koniunkturalnym jest najniższym jego punktem, w którym ogólny poziom aktywności gospodarczej przestaje spadać. W czasie fazy *ożywienia* wzrasta poziom aktywności, a *ekspansja* dotyczy sytuacji, gdy ogólny poziom aktywności przestaje rosnąć.
Na rysunku 2 przedstawiony został przebieg klasycznego cyklu koniunkturalnego, w zakresie zmian poziomu dochodu narodowego.

Należy podkreślić, że każda z faz cyklu koniunkturalnego jest procesem, a nie chwilowym stanem. Biorąc pod uwagę zatrudnienie, dochód narodowy i ceny, ich zmiany w poszczególnych fazach cyklu koniunkturalnego będą się przedstawiały w następujący sposób:

- recesja – spadek cen, dochodu narodowego, wzrost bezrobocia,



RYSUNEK 2. Klasyczny cykl koniunkturalny, oprac. własne na podstawie [3] str. 16

- depresja pokryzysowa – niski popyt, niskie ceny, ustaje spadek produkcji i wzrost bezrobocia,
- ożywienie – stopniowy wzrost produkcji, zatrudnienia, zysków i dochodów ludności,
- ekspansja – szybki wzrost produkcji, zatrudnienia, zysków i dochodów ludności.

Początek teorii cykli koniunkturalnych, a następnie modelom dynamicznym opisującym te cykle, dały prace J.M. Keynesa [2].

1.2. **Podstawowe modele cykli koniunkturalnych.**

1.2.1. *Model ekonomiczny Keynesa.* Zasadniczą niewiadomą w modelu Keynesa, którą należy wyznaczyć w celu zrozumienia funkcjonowania gospodarki rynkowej, jest wielkość dochodu narodowego. W modelu tym istnieje mechanizm dochodzenia do równowagi, który powoduje dostosowanie do siebie oszczędności i przyszłych inwestycji. Procesy dostosowawcze wymagają zmian w rozmiarach dochodu narodowego, a to związane jest z występowaniem wahań cyklicznych. Samo pojęcie cyklu sugeruje istnienie opóźnień czasowych w procesie dostosowawczym. Zauważmy, że gdyby gospodarka reagowała natychmiast na każde zakłócenie, to należałoby przypuszczać, że w obrazie aktywności gospodarczej występowałyby ostre skokowe zmiany w górę i w dół, a nie powtarzające się na przemian okresy recesji i ożywienia.

W modelu Keynesa źródłem wzrostu lub spadku produkcji, dochodu narodowego i zatrudnienia, czyli ogólnie źródłem cykli gospodarczych są inwestycje. Łatwo uzasadnić dlaczego inwestycje, a nie na przykład wydatki konsumpcyjne są przyczyną wahań cyklicznych. Otóż podczas gdy konsumenci są w stanie dość szybko dostosować swoje wydatki do zmieniających się dochodów, to już zmiany w wydatkach inwestycyjnych wymagają dłuższego czasu. Przedsiębiorstwa, czyli inwestorzy, nie angażują się pochopnie w duże i nieodwracalne przedsięwzięcia inwestycyjne, a ponadto realizacja inwestycji nie jest natychmiastowa, np. fabryki nie budują się z dnia na dzień.

Model cyklu koniunkturalnego Keynesa jest modelem statycznym, ponieważ wahania dokonują się wokół poziomu stacjonarnego, tzn. trend wzrostu w okresie obejmującym cały cykl jest zerowy.

TABELA 1. Obliczanie mnożnika ([1] str. 61)

Okres n	Zmiany dochodu Y	Zmiany konsumpcji C	Zmiany inwestycji I
1	0	0	1
2	1	0.7	0
3	0.7	0.7 ·0.7	0
4	0.49	0.49 ·0.7	0
5	0.343	0.343 ·0.7	0

Podstawowym modelem cyklu koniunkturalnego opartym na teorii Keynesa jest model mnożnika-akceleratora.

1.2.2. *Model mnożnika-akceleratora.* Jak podaje [1] model mnożnika-akceleratora rozróżnia skutki i przyczyny zmian wydatków inwestycyjnych. W modelu tym wzrost inwestycji prowadzi w krótkim czasie do jeszcze większego wzrostu całkowitego dochodu. Wydatki inwestycyjne podnoszą globalny popyt nie tylko bezpośrednio, lecz zwiększając dochody pobudzają także pośrednio skłonność do wydatków konsumpcyjnych. Zależność tę nazywa się *mechanizmem mnożnika.*

Definicja 1.2. *Mnożnikiem* nazywamy stosunek zmiany dochodu zapewniającej utrzymanie równowagi pomiędzy dochodem a planowanymi wydatkami, do powodującej ją zmiany w wydatkach autonomicznych, tzn. niezależnych od dochodu.

Mnożnik informuje, jak zmieni się dochód pod wpływem zmian w wydatkach autonomicznych. Wielkość mnożnika jest zależna od *krańcowej skłonności do konsumpcji*.

Definicja 1.3. *Krańcowa skłonność do konsumpcji* (w skrócie KSK, dalej oznaczone przez $0 < s < 1$) jest to część przyrostu dochodu, którą konsumenci mogą przeznaczyć na konsumpcję.
W interpretacji geometrycznej jest to nachylenie wykresu funkcji konsumpcji, czyli zależności wielkości konsumpcji od dochodu.

Aby wyznaczyć ogólny wzór na wielkość mnożnika można posłużyć się przykładem.

Przykład 1. KSK wynosi 0.7. W pierwszym okresie odnotowano jednostkowy przyrost popytu inwestycyjnego. To z kolei w następnym okresie pociąga zmianę w wielkości dochodu o 1. Z definicji KSK konsumpcja w tym okresie wynosi 0.7·1. W związku ze zwiększoną konsumpcją zwiększają się dochody o 0.7. Ponownie w odpowiedzi na zwiększony dochód zwiększają się wydatki na konsumpcję o 0.7·0.7. I tak dalej. Zmiany wielkości dochodu, konsumpcji i inwestycji przedstawione są w tabeli 1.

W celu uzyskania wartości mnożnika należy zsumować wszystkie przyrosty dochodu w każdym okresie:

$$\text{mnożnik} = 1 + 0.7 + 0.7^2 + 0.7^3 + 0.7^4 + \dots$$

Natychmiast widać, że prawa strona równości jest sumą szeregu geometrycznego z $a_1 = 1$ i $q = 0.7$.
Korzystając ze wzoru na sumę nieskończonego szeregu geometrycznego otrzymuje się, że

$$\text{mnożnik} = \frac{1}{1 - 0.7}.$$

Na podstawie przykładu można wywnioskować ogólną postać wzoru na mnożnik:

$$\text{mnożnik} = \frac{1}{1-s}.$$

Jak pokazano model mnożnika uwzględnia skutki zmian wielkości inwestycji, nie podaje jednak ich przyczyn. W celu uzupełnienia wyjaśnienia całości procesu dostosowawczego skonstruowana została zasada przyśpieszenia.

Definicja 1.4. *Zasada przyspieszenia* lub *model akceleratora* zakłada, że przedsiębiorstwa oceniają przyszłą wielkość produkcji, a przez to też dochodów, poprzez ekstrapolację dotychczasowego wzrostu produkcji. Wzrost produkcji (dochodu) w stałym tempie skutkuje niezmiennym poziomem inwestycji. Zatem do zwiększenia zamierzonego poziomu inwestycji konieczny jest przyśpieszony wzrost produkcji (dochodu).

2. Analiza wybranych modeli

2.1. **Model Samuelsona.** Pierwszeństwo w sformułowaniu teorii wzajemnego oddziaływania mnożnika i akceleratora w oparciu o prace A.H. Hansena przypisuje się P. Samuelsonowi. Założenia modelu Samuelsona są następujące:

- aktualna konsumpcja C_n jest liniową funkcją dochodu Y_{n-1} z poprzedniego okresu, a nieskonsumowana część dochodu zachowywana jest w formie oszczędności,
- obecne inwestycje I_n rosną w miarę wzrostu konsumpcji, a co za tym idzie, zgodnie z pierwszym założeniem, także w miarę wzrostu dochodu,
- dochód Y_n jest sumą inwestycji, konsumpcji oraz stałych, autonomicznych wydatków budżetowych.

Matematycznie model Samuelsona można zapisać jako dyskretny układ dynamiczny:

$$\begin{cases} C_{n+1} &= sY_n, \\ I_{n+1} &= v(C_{n+1} - C_n), \qquad n \in \mathbb{N}, \\ Y_{n+1} &= C_{n+1} + I_{n+1} + A_0, \end{cases}$$

gdzie $A_0 = C_0 + I_0 + G_0$ jest ustalone w danej gospodarce i jest sumą minimalnej konsumpcji C_0, niezależnych inwestycji I_0 oraz stałych wydatków lub wpływów budżetowych G_0. Ponadto dane są warunki początkowe Y_0, C_0.

Powyższy układ można sprowadzić metodą podstawiania do postaci liniowego równania różnicowego drugiego rzędu:

$$Y_{n+1} = sY_n + sv(Y_n - Y_{n-1}) + A_0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

gdzie Y_0, Y_1 są dane. Przyjmując w powyższym równaniu $sv \doteq \alpha$ otrzymuje się postać, na której zostały oparte dalsze rozważania:

$$Y_{n+1} = sY_{n-1} + \alpha(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + A_0, \quad n = 1, 2, \dots \tag{2.1}$$

Współczynnik $\alpha > 0$ jest opisanym wcześniej akceleratorem, który określa szybkość reakcji inwestycji na zmiany dochodu, stała $0 < s < 1$ reprezentuje keynesowską krańcową skłonność do konsumpcji, a współczynnik $v > 0$ oddaje relację między dwoma powyższymi jako $v = \frac{\alpha}{s}$.

Ponieważ równanie w modelu Samuelsona jest liniowe, można je rozwiązać wprost, korzystając z metod rozwiązywania równań drugiego rzędu postaci

$$ax_n + bx_{n-1} + cx_{n-2} = g_n.$$

Dla ułatwienia zmniejszając wskaźnik n o 1 równanie (2.1) można zapisać w postaci

(2.2) $$Y_n - (s+\alpha)Y_{n-1} + \alpha Y_{n-2} = A_0, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Wówczas widać, że współczynniki a, b, c oraz funkcja g_n równają się:

$$\begin{aligned} a &= 1, \\ b &= -(s+\alpha), \\ c &= \alpha, \\ g_n &= A_0. \end{aligned}$$

Suma $a + b + c = 1 - s - \alpha + \alpha = 1 - s \neq 0$, zatem rozwiązania szczególnego równania (2.2) należy szukać wśród funkcji stałych:

$$Y_n^p = k.$$

Wstawiając $Y_n = Y_{n-1} = Y_{n-2} = k$ do (2.2) otrzymuje się, że

$$k - (s+\alpha)k + \alpha k = A_0,$$
$$k = \frac{A_0}{1-s}.$$

Zatem rozwiązanie szczególne jest postaci

$$Y_n^p = \frac{A_0}{1-s}.$$

Punkt ten jest punktem równowagi układu dynamicznego (2.2).

Rozwiązanie ogólne równania (2.2) jest postaci

$$Y_n = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n + \frac{A_0}{1-s},$$

gdzie A_1, A_2 wyznacza się na podstawie danych warunków początkowych Y_0, Y_1, a λ_1 i λ_2 są pierwiastkami równania charakterystycznego

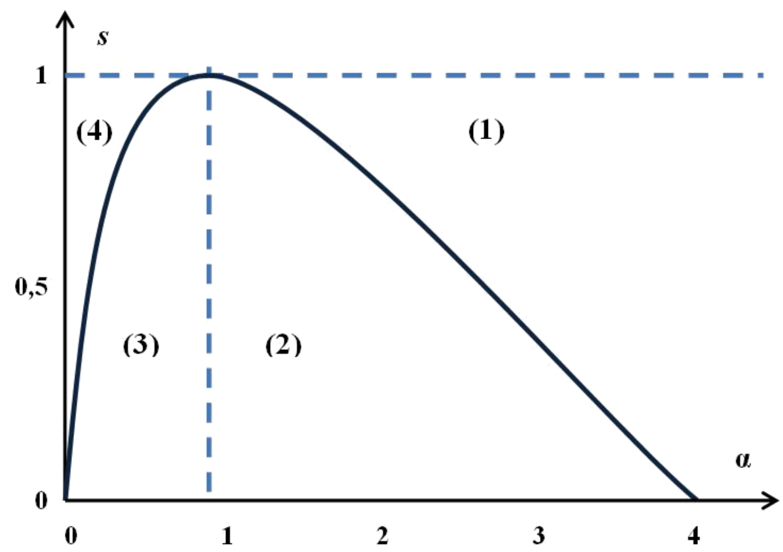
$$ch(\lambda) = \lambda^2 - (s+\alpha)\lambda + \alpha = 0,$$

czyli

$$\lambda_{1,2} = \frac{(s+\alpha) \pm \sqrt{(s+\alpha)^2 - 4\alpha}}{2}.$$

Obszary płaszczyzny (α, s), w których punkt równowagi równania (2.2) jest stabilny lub niestabilny zostały zaznaczone na rysunku 3. Obszary te zostały wyznaczone w oparciu o znane twierdzenia opisujące zależność stabilności punktów równowagi równania liniowego od wielkości pierwiastków równania charakterystycznego, które mówią, że punkt równowagi jest stabilny (a nawet silnie stabilny czyli przyciągający), gdy wszystkie pierwiastki są co do modułu mniejsze od 1, a niestabilny lub silnie niestabilny gdy warunek ten nie jest spełniony ([4], str. 8). Obszary zostały ograniczone przez:

- warunki nałożone na parametry α i s, wynikające z sensu ekonomicznego,



RYSUNEK 3. Zależność między parametrami s i α a dynamiką układu (2.1), oprac. własne

- wykres zależności parametru s od parametru α, gdy wyróżnik równania charakterystycznego $\Delta = 0$; zależność ta ma postać

$$(s+\alpha)^2 - 4\alpha = 0,$$

lub w postaci jawnej

$$s(\alpha) = 2\sqrt{\alpha} - \alpha. \tag{2.3}$$

- prostą $\alpha = 1$, która wynika z żądania, aby obydwa pierwiastki były co do modułu mniejsze od 1; warunek ten można zapisać jako $|\lambda_1 \lambda_2| < 1$, co w przypadku równania (2.2), stosując wzory Viete'a daje $\alpha < 1$ ([5] str. 52).

Rozpatrując obszar $0 < s < 1$, $\alpha > 0$ stwierdzamy, że:

(1) ponad wykresem zależności (2.3) równanie charakterystyczne ma dwa pierwiastki rzeczywiste; wówczas jeżeli $\alpha < 1$ (obszar 4) to punkt równowagi jest stabilny, w przeciwnym przypadku, gdy $\alpha > 1$ punkt równowagi jest niestabilny (obszar 1),

(2) W obszarze poniżej wykresu (2.3) pierwiastki równania charakterystycznego są zespolone; rozwiązanie ogólne równania (2.1) jest wówczas postaci

$$Y_n = r^n([B_1 \cos(n\theta) + B_2 \sin(n\theta)] + \frac{A_0}{1-s},$$

gdzie $r = \frac{c}{a} = \alpha$ oraz θ są odpowiednio modułem i argumentem pierwiastków zespolonych równania charakterystycznego, a stałe B_1, B_2 wyznacza się korzystając z warunków początkowych. W tym przypadku dla stabilności wymagane jest aby moduł pierwiastków zespolonych równania charakterystycznego był mniejszy od 1, co w przypadku równania (2.2) oznacza $\alpha < 1$ (obszar 3). Punkt jest niestabilny w przeciwnym przypadku, czyli gdy $\alpha > 1$. (obszar 2).

Uwagi.

(1) Dalszą, bardziej szczegółową analizę powyższego modelu można znaleźć w [5], szczególnie na stronie 34, gdzie oprócz powyższych rozważań dotyczących stabilności rozważana jest również monotoniczność oraz okresowość trajektorii.

(2) *Interpretacja ekonomiczna.* Punkt równowagi modelu ekonomicznego to takie wartości zmiennych ekonomicznych, które pozostają niezmienne w czasie. W przypadku powyższego modelu wartości dochodu, inwestycji i konsumpcji w punkcie równowagi pozostaną ustalone. Badanie stabilności takiego punktu pozwala na określenie jak zachowują się trajektorie (ciąg wartości w kolejnych okresach) w otoczeniu takiego punktu. Stabilność oznacza, że trajektorie znajdujące się w otoczeniu takiego punktu pozostaną w tym otoczeniu w kolejnych okresach. Dodatkowo własność silnej stabilności informuje o tym, że trajektorie ostatecznie zbiegają do punktu stałego, aby ostatecznie go osiągnąć. W sensie ekonomicznym oznacza to, że punkt równowagi zostanie osiągnięty po pewnej skończonej liczbie okresów.

2.2. **Model Goodwina-Hicksa.** Kolejnym modelem ekonomicznym powstałym na gruncie ekonomii Keynesa był model Hicksa (1950). Model Hicksa opiera się na tych samych założeniach co model Samuelsona, ale jest uzupełniony o dodatkowe opóźnienie czasowe oraz nieliniowe stabilizatory, które czynią go bardziej realnym, na przykład ograniczenie górne wynikające z wykorzystania wszystkich możliwych zasobów – tzw. sufit, lub tzw. podłoga – minimalny poziom inwestycji. W tym samym czasie co Hicks, rezultaty swoich badań ogłosił R. Goodwin, który wprowadził do modelu Samuelsona nieliniową funkcję inwestycji. Szybkość zmiany inwestycji, lub inaczej pochodna funkcji inwestycji względem zmiennej Y jest akceleratorem, który w tym przypadku nie jest już stałą.

W dalszej części zostały przeanalizowane własności układu dynamicznego, który łączy i uogólnia idee Goodwina i Hicksa. Przez model Goodwina-Hicksa rozumieć będziemy uogólnienie równania Samuelsona postaci

$$Y_{n+1} = sY_n + I(Y_n - Y_{n-1}) + A_0, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{2.4}$$

gdzie $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest niemalejącą funkcją inwestycji, a pozostałe zmienne i wielkości są zdefiniowane jak poprzednio.
Niech

$$A_0 = I_0 + C_0 + G_0 \geq 0$$

oraz

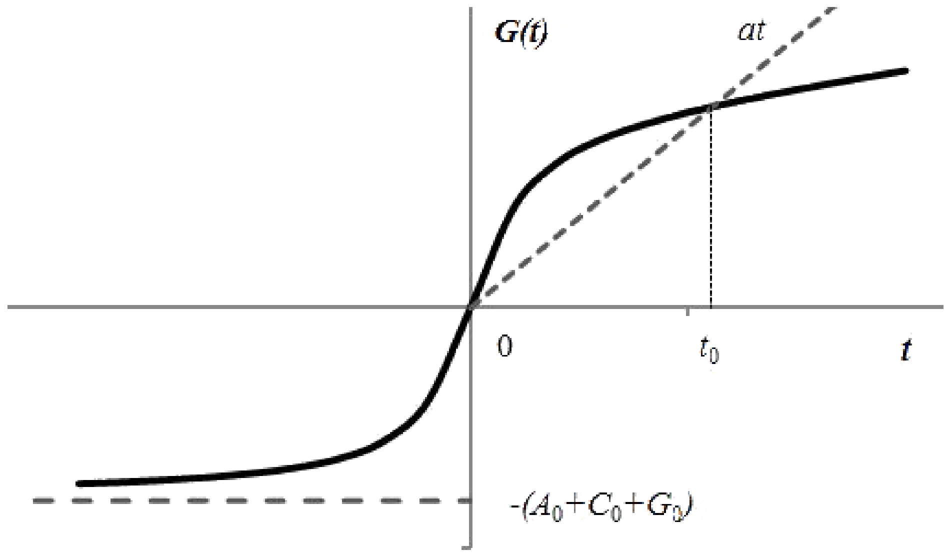
$$g(t) \doteq I(t) + A_0, \quad t \in \mathbb{R},$$

gdzie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, to widać, że równanie (2.4) jest szczególnym przypadkiem równania drugiego rzędu typu $x_{n+1} = cx_n + g(x_n - x_{n-1})$, którego szczególne własności zostały przedstawione w [4] str. 172 i zostały wykorzystane w poniższej analizie.
Dla dalszych rozważań wymagane jest sprecyzowanie założeń nałożonych na funkcję inwestycji I.

Definicja 2.1. *Funkcją inwestycji Goodwina* nazywamy funkcję $G \in C^1(\mathbb{R})$ spełniającą następujące warunki:

(i) $G(0) = 0$ oraz $G(t) + A_0 \geq 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$,
(ii) $G'(t) \geq 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$ oraz dodatkowo $G'(0) > 0$,
(iii) istnieją stałe $t_0 > 0$ i $0 < a < 1$ takie, że $G(t) \leq at$ dla każdego $t \geq t_0$.

Na rysunku 4 pokazano przykładowy wykres funkcji Goodwina.



RYSUNEK 4. Funkcja inwestycji Goodwina, oprac. własne na podstawie [4] str. 245

W dalszych rozważaniach przydatne będą następujące lematy, których dowody znajdują się w [4]:

Lemat 2.2 ([4] str. 174)**.** *Niech dane będzie równanie $x_{n+1} = cx_n + g(x_n - x_{n-1})$. Niech funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie niemalejąca i ograniczona z dołu i niech $c < 1$.*

Jeżeli istnieje $\alpha \in (0, 1)$ i $u_0 > 0$ takie, że $g(u) \leq \alpha u$ dla każdego $u \geq u_0$, to dane równanie posiada nietrywialny przedział absorbujący. W szczególności wszystkie rozwiązania tego równania są ograniczone.

Lemat 2.3 ([4] str. 248)**.** *Dane jest równanie*

$$y_{n+1} = sy_n + G(y_n - y_{n-1}) + A_0, \quad 0 \leq s < 1, n = 1, 2, \ldots \tag{2.5}$$

gdzie G jest funkcją inwestycji Goodwina. Jeżeli $G'(0) > 1$, to wszystkie nietrywialne rozwiązania powyższego równania są ograniczone i posiadają co najmniej dwa punkty skupienia, co oznacza, że uporczywie oscylują ([4] *str. 165), ostatecznie w przedziale absorbującym $[0, \frac{t_1}{1-s} + 1]$, gdzie $t_1 \geq t_0$ jest tak duże, że $G(t) + A_0 \leq at$ dla każdego $t \geq t_1$ o ile $G(t) \leq at$ dla $t \geq t_0$.*

Można zauważyć, że definicja 2.1. ogranicza istnienie funkcji Goodwina tylko do przypadku, kiedy $A_0 > 0$. Ponieważ gdyby $A_0 = 0$, to zgodnie z punktem (i) definicji 2.1. musiałoby zachodzić $G'(t) \geq 0$ dla każdego t. Ale łatwo zauważyć, że niemożliwe byłoby wówczas uczynić zadość założeniom, że $G(0) = 0$ i jednocześnie $G'(0) > 0$. To ostatnie oznacza, że G jest ściśle rosnąca w pewnym otoczeniu zera, czyli również dla pewnych argumentów ujemnych. Zatem funkcja G musi być ujemna dla $t < 0$ i dopiero rośnie gdy $t \to 0^-$, aby osiągnąć w zerze wartość 0. Dla rozpatrzenia przypadku $A_0 = 0$ trzeba uogólnić definicję funkcji Goodwina.

Definicja 2.4. Funkcję $H \in C(\mathbb{R})$ nazywamy *funkcją inwestycji Goodwina-Hicksa*, jeżeli spełnia następujące warunki:

(i) $H(0) = 0$ oraz $H(t) + A_0 \geq 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$,

(ii) H jest niemalejąca w całym $\mathbb{R}$, a dodatkowo ściśle rosnąca w przedziale $(0, \delta)$ dla pewnego $\delta > 0$,

(iii) istnieją stałe $t_0 > 0$, $0 < a < 1$ takie, że $H(t) \leq at$ dla każdego $t \geq t_0$.

Widać, że jedyną zmianą jest zmiana założenia o ścisłej monotoniczności funkcji inwestycji w otoczeniu zera. Funkcja Goodwina-Hicksa musi być ściśle rosnąca dopiero po przekroczeniu zera. Zatem wcześniej może być funkcją stałą $H(t) = 0$ dla $t \leq 0$, co pozostaje w zgodzie z założeniem, że $H(t) + A_0 \geq 0$ w przypadku gdy $A_0 = 0$.

Z tak zdefiniowaną funkcją inwestycji można przeanalizować dynamikę układu Goodwina-Hicksa (2.4) w przypadku gdy $A_0 = 0$.

Dynamika układu przedstawiona została w formie twierdzenia:

Twierdzenie 2.5. *Załóżmy, że $A_0 = I_0 + C_0 + G_0 = 0$. Wówczas wszystkie rozwiązania równania*

$$y_{n+1} = sy_n + H(y_n - y_{n-1}), \quad 0 \leq s < 1, n = 1, 2, \dots \tag{2.6}$$

są zbieżne do zera, od pewnego miejsca monotonicznie. Ponadto, następujące stwierdzenia są prawdziwe:

(i) *Jeżeli $H \in C^1(\mathbb{R})$, to $H'(0) = 0$ oraz początek układu współrzędnych jest asymptotycznie stabilny.*

(ii) *Jeżeli $H(t) = bt$ w przedziale $(0, r)$ przy pewnym ustalonym $r > 0$ oraz*

$$b > (1 + \sqrt{1 - s})^2$$

to wówczas początek układu jest niestabilny.
Jeśli $0 = y_0 < y_1 < r$, to trajektoria $\{y_n\}$ jest rosnąca i oddala się od zera tak długo, dopóki $y_n - y_{n-1} < r$.

Dowód. Jak zauważono wcześniej, ponieważ $A_0 = 0$ to $H(t) = 0$ dla $t \leq 0$. Istnieją teraz dwie możliwości:

(1) istnieje ściśle rosnąca trajektoria $\{y_n\}$ równania (2.6),

(2) dla każdego rozwiązania istnieje liczba $k \geq 1$, dla której $y_{k-1} \geq y_k$.

Pierwszy przypadek nie może wystąpić dla rozwiązań dodatnich, bo zgodnie z lematem 2.2 rosnące trajektorie mają ograniczenie τ, przy czym

$$\tau = \lim_{n \to \infty} [sy_n + H(y_n - y_{n-1})] = s\tau + H(0) = s\tau,$$

co pociąga za sobą, że $\tau = 0$.
Dla warunków początkowych $y_0, y_1 < 0$ ciąg $\{y_n\}$ jest rosnący, ponieważ

$$y_{n+1} = sy_n + H(y_n - y_{n-1}) \geq sy_n > y_n$$

tak długo jak y_n jest ujemne. Zatem albo $y_n \to 0$ przy $n \to \infty$ albo y_n musi stać się dodatnie, co jest, jak pokazaliśmy, niemożliwe. Zatem y_n zmierza do zera.
W drugim przypadku mamy

$$y_{k+1} = sy_k < y_k,$$

zatem $\{y_n\}$ jest ściśle malejący dla $n \geq k$. Ponieważ zero jest jedynym punktem równowagi, zatem mamy, że $y_n \to 0$ przy $n \to \infty$.

Niech teraz spełnione będzie założenie *(i)*. Jeżeli $H(t)$ jest stała dla $t \leq 0$, to $H'(t) = 0$ dla $t < 0$, ponadto ponieważ $H'(t)$ jest ciągła, to $H'(0) = 0$.

Ponieważ $H(0) = 0$ równanie charakterystyczne redukuje się do równania

$$\lambda^2 - s\lambda = 0,$$

a jego rozwiązania $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = s$ są wartościami własnymi jakobianu odwzorowania h określającego układ dynamiczny (2.6), tj.

$$h(y_n, y_{n-1}) = sy_n + H(y_n - y_{n-1}).$$

Ponieważ obydwie wartości własne są mniejsze od 1, to początek układu współrzędnych jest asymptotycznie stabilny.

Niech teraz spełnione będą założenia punktu (ii). Wówczas w przedziale $(0, r)$ równanie (2.6) przyjmuje postać (po zmniejszeniu indeksu n):

$$y_n - sy_{n-1} - b(y_{n-1} - y_{n-2}) = 0, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

$$y_n - (s + b)y_{n-1} - by_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{2.7}$$

Wyróżnik równania charakterystycznego

$$\Delta = (s + b)^2 - 4b > 0,$$

zatem wartości własne λ_1 i λ_2 są postaci

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(s + b - \sqrt{(s + b)^2 - 4b}),$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(s + b + \sqrt{(s + b)^2 - 4b}),$$

a ponadto można dla nich zapisać ciąg nierówności:

$$0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2.$$

Dla warunków początkowych

$$y_0 = 0 \text{ oraz } y_1 \in (0, r),$$

rozwiązaniem równania (2.7) jest ciąg określony następująco:

$$y_n = \frac{y_1}{\sqrt{(s + b)^2 - 4b}} \left(\lambda_2^n - \lambda_1^n\right).$$

Widać, że ciąg $\{y_n\}$ określony powyżej jest rosnący, co więcej rosnący wykładniczo. Kolejne wyrazy oddalają się od zera, przynajmniej dopóki któryś z nich nie przekroczy r. Zatem pokazano, że początek układu jest niestabilny, a tym samym twierdzenie zostało udowodnione.

Uwagi.

(1) Dalszą, bardziej szczegółową analizę powyższego modelu można znaleźć w [4], szczególnie na stronach 243–269, gdzie powyższe rozważania dotyczące wybranego przypadku rozszerzone zostały o analizę innych przypadków, m. in. modyfikację funkcji Goodwina-Hicksa czy przypadek całkowitej konsumpcji oszczędności.

(2) *Interpretacja ekonomiczna.* Przyjrzyjmy się twierdzeniu 2.5, w szczególności punktowi (ii), który określa przypadek, gdy punkt równowagi jest niestabilny – w interpretacji ekonomicznej oznacza to, że wielkość dochodu bliska punktowi równowagi oddala się od niego, jednak tylko dopóki różnica między wartościami dochodu w dwóch kolejnych okresami przekroczy wartość r. Przyczyną utraty stabilności pokazanej w punkcie (i) jest zmiana

natury funkcji H w zerze (czyli punkcie równowagi). Mianowicie założenie konkretnej postaci funkcji Goodwina-Hicksa w przedziale $(0, r)$, w tym przypadku liniowej, powoduje utratę własności gładkości funkcji (w zerze funkcja nie jest różniczkowalna w sposób ciągły). Wartość r można interpretować jako „parametr bezpieczeństwa", do którego pozwala się aby gospodarka się rozpędzała, natomiast po jego przekroczeniu wracała do równowagi.

3. PODSUMOWANIE

Modelowanie zjawisk makroekonomicznych przy pomocy równań różnicowych i ich układów są ciekawym przykładem zastosowania matematyki w naukach społecznych. Zjawiska te, mimo że ze swojej natury ciągłe, mierzone są w określonych momentach, stąd zastosowanie modeli dyskretnych nasuwa się natychmiastowo. Klasyczne modele zaproponowane w połowie XX wieku, które zostały przedstawione i przeanalizowane w niniejszym artykule, poprzez prostotę swoich założeń oraz ich stosunkowo łatwą analizę mogą być dobrą podstawą do tworzenia nowoczesnych i szczegółowych modeli, które wierniej oddadzą wyzwania współczesnej ekonomii.

LITERATURA

[1] D. Begg, S. Fisher, R. Dornbush, *Ekonomia, tom 2*, Wydawnictwo Ekonomiczne Warszawa, 1995.

[2] J.M. Keynes, *Ogólna teoria zatrudnienia, procentu i pieniądza*, przeł. Michał Kalecki, Stanisław Rączkowski, PWN, Warszawa, 2003.

[3] R. Orłowska, S. Pangsy-Kania, *Cykle koniunkturalne – teoria, analiza i praktyk*, Fundacja Rozwoju Uniwersytetu Gdańskiego, 2003.

[4] H. Sedaghat, *Nonlinear Difference Equations. Theory with Applicatons to Social Science Models*, Kluwer Academic Publishers, 2003.

[5] P.N.V. Tu, *Dynamical Systems. An Introduction with Applications in Economics and Biology*, Berliner Verlag, 1994.

PIOTR HACHUŁA
INSTITUTE OF LOGISTICS AND WAREHOUSING, UL. ESTKOWSKIEGO 6, 61-755 POZNAŃ, POLAND
Adres e-mail: Piotr.Hachula@gmail.com