



ALGORYTMY ŚLEDZENIA KRZYWYCH

JACEK GULGOWSKI

STRESZCZENIE. W artykule przedstawione zostaną podstawowe metody numerycznego śledzenia krzywych zadanych przy pomocy równania uwikłanego $f(x) = 0$, gdzie $f: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest odwzorowaniem ciągłym (bądź klasy C^1). Metody te znane są w literaturze pod angielskimi nazwami *path following algorithms* lub *numerical continuation methods*. Znajdują one liczne zastosowania – o części z nich również wspomnimy w poniższym tekście.

1. WSTĘP

Będziemy rozważać równania $f(x) = 0$, gdzie $f: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest odwzorowaniem ciągłym. Oczywiście na zagadnienie to możemy spojrzeć jako na układ równań

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_{k+1}) = 0, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_{k+1}) = 0. \end{cases}$$

Poniżej przedstawimy wybrane sytuacje, w których takie zagadnienia występują, motywujące potrzebę ich badania. Zanim jednak do takich praktycznych przykładów przejdziemy zastanówmy się co o takim zagadnieniu możemy powiedzieć.

Oczywiście w sytuacji, gdy $f: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest odwzorowaniem ciągłym zbiór zer na pewno jest zbiorem domkniętym – jednak niewiele więcej możemy o nim powiedzieć. Natomiast gdy f jest odwzorowaniem klasy C^1 strukturę zbioru $f^{-1}(0)$ możemy (przynajmniej w pewnych sytuacjach) dosyć precyzyjnie opisać. Zacznijmy od kilku definicji.

Przed wszystkim warto ustalić definicję krzywej:

Definicja 1.1. Krzywą w przestrzeni \mathbb{R}^m nazywamy odwzorowanie $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, klasy C^1 , spełniające warunki:

- i) γ jest odwzorowaniem różnowartościowym;
- ii) $\gamma'(t) \neq 0$ dla $t \in [a, b]$.

Definicja 1.2. Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^{k+1}$ nazywamy punktem regularnym odwzorowania $f: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ (klasy C^1), gdy pochodna $Df(x_0)$ jest odwzorowaniem liniowym rzędu k (t.j. maksymalnego rzędu). Jeżeli punkt nie jest regularny to nazywamy go *punktem krytycznym*.

Definicja 1.3. Punkt $y_0 \in \mathbb{R}^k$ nazywamy wartością regularną odwzorowania $f: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ (klasy C^1), gdy wszystkie punkty $x \in f^{-1}(y_0)$ są punktami regularnymi. Jeżeli wartość y_0 nie jest regularna, to nazywamy ją *wartością krytyczną*.

Warto przypomnieć sobie w tym momencie twierdzenie o funkcji uwikłanej (formułowane na przeróżne sposoby, tutaj wygodnie będzie nam posługiwać się wersją podaną za książką [9], zaadaptowaną do naszych potrzeb)

Twierdzenie 1.4. Niech $f: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ będzie odwzorowaniem klasy C^1 , zaś $p \in \mathbb{R}^{k+1}$ takim zerem odwzorowania f (tzn. $f(p) = 0$), że pochodna $Df(p)$ jest surjekcją (czyli jest maksymalnego rzędu). Wówczas istnieje lokalny dyfeomorfizm $\varphi: V_0 \rightarrow U_p$ klasy C^1 , dla którego

- i) $0 \in V_0 \subset \mathbb{R}^{k+1}$ jest zbiorem otwartym;
- ii) $p \in U_p \subset \mathbb{R}^{k+1}$ jest zbiorem otwartym;
- iii) $\varphi(0) = p$;
- iv) $f(\varphi(x_1, \dots, x_{k+1})) = (x_1, \dots, x_k)$.

Powyższe oznacza, że

$$f^{-1}(0) \cap U_p = \varphi(0, \dots, 0, x_{k+1})$$

lub – innymi słowy – zbiór $f^{-1}(0)$ jest lokalnie krzywą klasy C^1 . Prowadzi to do następującego wniosku (por. [11]):

Wniosek 1.5. Jeżeli 0 jest wartością regularną odwzorowania f , to zbiór $f^{-1}(0)$ jest sumą rozłącznych zbiorów, z których każdy jest homeomorficzny z prostą lub okręgiem.

Innymi słowy: gdy 0 jest wartością regularną, to zbiór zer składa się z porządných krzywych. W tej sytuacji zadanie numerycznego zlokalizowania tego zbioru wydaje się sprowadzać do podania takiej krzywej – począwszy od pewnego, znanego nam, punktu początkowego.

Jak inna może być sytuacja, gdy zero nie jest wartością regularną? Zbiór zer nie musi być wtedy lokalnie krzywą – wystarczy pomyśleć o odwzorowaniu stale równym 0 . Zbiory zer mogą być, w tej sytuacji, nie tylko różnościami wymiaru wyższego niż 1 – mogą w ogóle nie być różnościami. Popatrzmy bowiem na bardzo prosty przykład odwzorowania $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ danego wzorem $f(\lambda, x) = \lambda x - Ax$, gdzie $A: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest odwzorowaniem liniowym, którego wszystkie wartości własne są jednokrotne. Wówczas zbiór rozwiązań składa się co prawda z krzywych (właściwie prostych) – jednak nie są one rozłączne. W dowolnie małym otoczeniu otwartym punktów krytycznych postaci $(\lambda_i, 0)$ (gdzie λ_i jest wartością własną A) zbiór $f^{-1}(0)$ nie jest homeomorficzny z przedziałem $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

Pojawiający się tutaj punkt przecięcia dwóch krzywych występujących w zbiorze rozwiązań nazywany jest *punktem bifurkacji*. Nieco bardziej formalnie mówi o tym kolejna definicja.

Definicja 1.6. Dana jest krzywa $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ taka, że $f(\gamma(t)) = 0$. Punkt $x_0 = \gamma(t_0)$ nazywany jest *punktem bifurkacji* równania $f(x) = 0$, gdy istnieje takie $\varepsilon > 0$, że każde otwarte otoczenie punktu x_0 zawiera zera f nie należące do $\gamma(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$.

Tego typu punkty okazują się być pewną przeszkodą podczas śledzenia zbioru zer. Rzeczywiście – nawet gdy spojrzymy na to czysto intuicyjnie – taki punkt bifurkacji może być dla algorytmu podążającego wzdłuż krzywej swoistą przeszkodą, problemem decyzyjnym – którądy iść? Albo

jeszcze inaczej: wyborem, który łatwo przeoczyć – tym samym pomijając spore fragmenty zbioru rozwiązań.

Na zakończenie warto wspomnieć o jeszcze jednym fundamentalnym wyniku, który mówi nam wiele o strukturze zbioru rozwiązań rozpatrywanych przez nas równań. Otóż możemy zapytać się na ile "powszechne" są sytuacje, w których występują wartości krytyczne? Otóż okazuje się, że aby trafić na wartość krytyczną trzeba mieć prawdziwego "pecha"... Mówi o tym podane niżej twierdzenie Sarda (podane tu w wersji pasującej do kontekstu, w którym się tu poruszamy, ogólniejszą wersję znaleźć można np. w książce [9]).

Twierdzenie 1.7 (Sard). *Załóżmy, że $f: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest odwzorowaniem klasy C^2 . Wówczas zbiór wartości krytycznych odwzorowania f jest zbiorem miary Lebesgue'a 0 w \mathbb{R}^k .*

Twierdzenie to pokazuje, że jeśli dla funkcji $f: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ klasy C^2 punkt 0 jest wartością krytyczną, to dowolnie blisko $0 \in \mathbb{R}^k$ istnieją wartości regularne $c \in \mathbb{R}^k$ odwzorowania f . To oznacza, że nawet jeśli zbiór $f^{-1}(0)$ zawiera krzywe przecinające się, to każdy ze zbiorów $f^{-1}(c)$ (oczywiście dla odpowiednio dobranego $c \in \mathbb{R}^k$) zawiera jedynie krzywe parami rozłączne.

2. PRZYKŁADOWE ZASTOSOWANIA

Przyjrzyjmy się kilku sytuacjom, w których szukamy zbioru zer $f^{-1}(0)$ odwzorowań $f: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$.

1. Zapewne pierwszym problemem, który przychodzi w takiej sytuacji do głowy jest poszukiwanie krzywych przestrzennych (tj. w \mathbb{R}^3) powstałych z przecięcia dwóch powierzchni. Efekt takiego przecięcia nie zawsze jest łatwy do wyobrażenia... Cóż może powstać np. z przecięcia sfery i powierzchni bocznej walca? Ten przykład jest dosyć prosty do wyobrażenia – i (w pewnej szczególnej sytuacji) znany jako krzywa Vivianiego (por. rys. 1) – jednak mimo swojego elementarnego pochodzenia jej kształt wcale nie jest taki prosty do przewidzenia.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ (x-1)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

A co będzie, gdy ten prosty wzór nieco skomplikujemy? Jaka krzywa powstanie np. gdy rozwiążemy układ równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ (x-1)^4 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

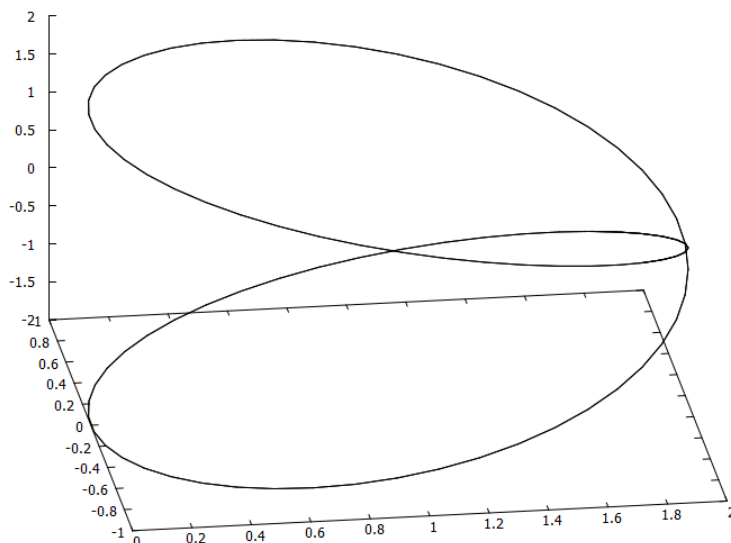
Trudno tu o analityczne rozwiązanie... trudno znaleźć parametryczną postać takiej krzywej – jak więc ją narysować?

2. Poszukiwanie wartości własnych odwzorowania liniowego $A: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest kolejnym problemem tego typu. Jeśli rozważymy odwzorowanie $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ dane wzorem

$$f(\lambda, x) = \lambda x - Ax,$$

to zauważymy, że stajemy przed dokładnie takim problemem, który badamy. Zauważmy, że zera f postaci $(\lambda_i, 0)$, dla rzeczywistych wartości własnych λ_i , nie są regularne.

Oczywiście rozwiązywanie tego zagadnienia metodą śledzenia krzywych w zbiorze zer odwzorowania f nie jest najlepszym pomysłem (jest mnóstwo dużo bardziej efektywnych metod, które możemy w tym celu wykorzystać) – warto jednak zwrócić uwagę na to, że ten bardzo podstawowy



RYSUNEK 1. Krzywa Vivianiego

przykład również pasuje do naszego schematu. A jeśli zagadnienie liniowe zaburzymy nieliniowym składnikiem, to stopień komplikacji problemu może gwałtownie wzrosnąć...

3. Pozostańmy przez chwilę w kręgu zagadnień związanych z badaniem macierzy kwadratowych. Rozważmy – rzeczywistą – macierz kwadratową wymiaru k zależną od dwóch parametrów rzeczywistych λ oraz α , czyli $A(\lambda, \alpha)$. Zapytajmy się dla jakich wartości parametrów $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ macierz ta staje się osobliwa. Tym samym szukamy zbioru zer odwzorowania $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danego wzorem $f(\lambda, \alpha) = \det A(\lambda, \alpha)$.

Sytuacja komplikuje się, gdy dopuścimy sytuację, w której macierz A jest macierzą zespoloną zależną od rzeczywistego parametru λ – w tej sytuacji poszukujemy zbioru zer odwzorowania $f: \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ danego wzorem

$$f(\lambda, \alpha + i\beta) = \det A(\lambda, \alpha + i\beta).$$

Oczywiście możemy to odwzorowanie traktować jako odwzorowanie $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Tego typu zagadnienia są rozwiązywane w sytuacjach praktycznych, np. związanych z problemami techniki mikrofalowej, a w szczególności z poszukiwaniem tzw. charakterystyki dyspersji w stratnym falowodzie. Przykład takiego zastosowania znaleźć można w pracy [8].

4. Poszukiwanie wartości i wektorów własnych stanowi szczególny przykład układu równań wielomianowych. Oczywiście problem poszukiwania wartości własnych można uzupełnić o dodatkowe równanie wymuszające uzyskanie niezerowych wektorów x – jak choćby

$$x_1^2 + \dots + x_k^2 - 1 = 0$$

czy nawet

$$x_1 + \dots + x_k - 1 = 0.$$

Uzyskamy wówczas układ $k + 1$ równań wielomianowych z $k + 1$ niewiadomymi, co odpowiadać będzie poszukiwaniu zer odwzorowania $\tilde{f}: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$. Wielomianowe układy równań,

w których występuje tyle samo równań co niewiadomych posiadają – w pewnych sytuacjach – skończenie wiele rozwiązań. Jedną z metod poszukiwania takich rozwiązań jest *metoda homotopii* omówiona szczegółowo w pracy [10]. Dotyczy ona zarówno poszukiwania rozwiązań zespolonych jak i rzeczywistych. Obie sytuacje są kompletnie różne od strony teoretycznej, jednak metoda rozwiązań oparta jest o tą samą ideę. Popatrzmy zatem na problem

$$(2.1) \quad \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_k) = 0, \\ f_2(x_1, \dots, x_k) = 0, \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_k) = 0, \end{cases}$$

gdzie $f_1, \dots, f_k: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ są wielomianami stopni, odpowiednio, $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{N}$.

Pomysł na znalezienie rozwiązań tego układu równań jest relatywnie prosty: zaczynamy od pewnego równania wielomianowego, którego rozwiązania znamy. To powinno być coś w miarę prostego, jak np.

$$\begin{cases} x_1^{d_1} - c_1 = 0, \\ x_2^{d_2} - c_2 = 0, \\ \dots \\ x_k^{d_k} - c_k = 0. \end{cases}$$

W dalszej kolejności, dla danego odwzorowania wielomianowego $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, rozważamy zagadnienie wielomianowe z dodatkową, sztucznie wprowadzoną, niewiadomą $t \in [0, 1]$.

$$(2.2) \quad \begin{cases} tf_1(x_1, \dots, x_k) + (1-t)(x_1^{d_1} - c_1) = 0, \\ tf_2(x_1, \dots, x_k) + (1-t)(x_2^{d_2} - c_2) = 0, \\ \dots \\ tf_k(x_1, \dots, x_k) + (1-t)(x_k^{d_k} - c_k) = 0. \end{cases}$$

Następnie staramy się – począwszy od znanych zer dla $t = 0$ śledzić krzywe rozwiązań układu (2.2), licząc na to, że (przynajmniej dla niektórych z tych krzywych) dojdziemy do rozwiązań przy $t = 1$. Oczywiście jest tu mnóstwo potencjalnych pułapek... Zainteresowanych tematem raz jeszcze odsyłamy do pracy [10].

5. Metody oparte o konstruowanie homotopii mogą mieć swoje naturalne zastosowanie w numerycznym poszukiwaniu punktów stałych odwzorowania $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$. Wystarczy odpowiednio zaadaptować jeden z dowodów twierdzenia Brouwera o punkcie stałym. Po szczegóły odesłać możemy np. do pozycji [6] – poniżej tylko kilka słów na ten temat.

Twierdzenie 2.1 (Brouwer). *Niech $B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^k: |x| < 1\}$ oznacza kulę (otwartą) w przestrzeni \mathbb{R}^k . Wówczas każde odwzorowanie ciągłe $f: B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ posiada punkt stały.*

Jak wspomnieliśmy wyżej, dowodu nie będziemy tutaj przytaczać – opiszemy jednak jego główną ideę. Jeżeli założymy, że odwzorowanie f nie ma punktu stałego na brzegu kuli (czyli na zbiorze $S^{k-1} = \{x \in \mathbb{R}^k: |x| = 1\}$), to można to odwzorowanie w sposób ciągły zdeformować do identyczności przy pomocy homotopii $h: [0, 1] \times B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$, danej wzorem

$h(t, x) = x - tf(x)$. Co ważne deformacja ta w żadnej chwili $t \in [0, 1]$ nie ma zera na brzegu kuli $B(0, 1)$. W chwili $t = 1$ to właśnie założyliśmy, natomiast dla chwil $t \in [0, 1)$ widzimy, że

$$|h(t, x)| = |x - tf(x)| \geq |x| - t|f(x)| \geq 1 - t > 0.$$

W tej sytuacji można pokazać (i tu jest ten trudny kawałek dowodu), że każde z odwzorowań $h(t, \cdot): \overline{B(0, 1)} \rightarrow \overline{B(0, 1)}$ musi mieć zero w kuli otwartej $B(0, 1)$. W szczególności istnieje $x_0 \in B(0, 1)$, dla którego $h(1, x_0) = 0$, co oznacza

$$x_0 - f(x_0) = 0,$$

czyli x_0 jest punktem stałym odwzorowania f .

No dobrze – ale jak ten punkt stały znaleźć? Czasami wygodniej jest spojrzeć na problem pozornie trudniejszy – jakim jest poszukiwanie zer homotopii $h: [0, 1] \times \overline{B(0, 1)} \rightarrow \overline{B(0, 1)}$. Jeżeli uda nam się ten zbiór ustalić, to należeć do niego będą też punkty $(1, x_0)$, dla których $h(1, x_0) = 0$, a więc punkty stałe naszego odwzorowania. Może i tutaj można próbować zidentyfikować w zbiorze $h^{-1}(0)$ krzywe, które można śledzić – począwszy od znanego zera $h(0, 0)$?

Podane wyżej przykłady pokazują liczne, potencjalne zastosowania algorytmów, które pomagają numerycznie wyznaczyć zbiór rozwiązań tego typu zagadnień. Poniżej omówimy dwie podstawowe klasy takich algorytmów. Opis ten będzie – z konieczności – jedynie szkicem, pokazującym jednak podstawowe idee. Po szczegóły oraz głęboką analizę tematu pragniemy odesłać Czytelnika do monografii [1] oraz do prac przeglądowych [2] oraz [12].

3. METODA PL

W pierwszej kolejności omówimy metodę zwaną w angielskojęzycznej literaturze jako *Piecewise-Linear continuation method* – w dalszym ciągu będziemy określać ją jako metodę PL. Jej punktem wyjścia jest odpowiedni podział \mathbb{T} dziedziny odwzorowania na sympleksy – a następnie zdefiniowanie (w oparciu o ten podział) pewnej aproksymacji $f_{\mathbb{T}}: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ odwzorowania f , która jest kawałkami afiniczna. Następnie wystarczy znaleźć zbiór $f_{\mathbb{T}}^{-1}(0)$ – aproksymujący zbiór $f^{-1}(0)$. Tak to wygląda w kilku zdaniach – nieco porządniejsze przedstawienie tej metody wymagać jednak on nas będzie więcej dyscypliny. No to zaczynamy.

Definicja 3.1. Mówimy, że punkty $v_0, v_1, \dots, v_l \in \mathbb{R}^{k+1}$ są *afinicznie niezależne*, gdy wektory $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_l - v_0$ są liniowo niezależne.

Łatwo zauważyć, że definicja ta nie zależy od tego, który z wyjściowych punktów oznaczymy jako v_0 . Widzimy też, że taki układ punktów afinicznie niezależnych nie może zawierać więcej niż $k + 2$ elementów.

Definicja 3.2. Zbiór $\sigma \subset \mathbb{R}^{k+1}$ nazywamy l -wymiarowym sympleksem, gdy jest wypukleniem (zwanym również powłoką wypukłą) zbioru $l+1$ punktów afinicznie niezależnych $\{v_0, v_1, \dots, v_l\} \subset \mathbb{R}^{k+1}$, czyli

$$\sigma = \text{conv}\{v_0, v_1, \dots, v_l\} = \{t_0 v_0 + t_1 v_1 + \dots + t_l v_l : t_i \in \mathbb{R}, t_i \geq 0, t_0 + t_1 + \dots + t_l = 1\}.$$

Punkty v_i ($i = 0, \dots, l$) nazywamy wówczas wierzchołkami sympleksu σ .

Warto zauważyć, że każdy z punktów $x \in \sigma$ możemy – i to jednoznacznie! – zapisać jako kombinację wypukłą wierzchołków sympleksu, t.j.

$$x = t_0 v_0 + t_1 v_1 + \dots + t_l v_l,$$

przy czym $t_0 + t_1 + \dots + t_l = 1$ oraz $t_i \geq 0$ dla $i = 0, 1, \dots, l$. Ciąg liczb (t_0, t_1, \dots, t_l) nazywamy *współrzędnymi barycentrycznymi punktu x w sympleksie σ* .

Definicja 3.3. Niech $\sigma \subset \mathbb{R}^{k+1}$ będzie $(k + 1)$ -wymiarowym sympleksem rozpiętym na wierzchołkach $\{v_0, v_1, \dots, v_{k+1}\}$. Wówczas każdy z sympleksów rozpiętych na $(k + 1)$ -elementowym podziorze zbioru $\{v_0, v_1, \dots, v_{k+1}\}$ nazywamy k -wymiarową ścianą sympleksu σ .

Zauważmy od razu, że wszystkie punkty należące do k -wymiarowej ściany V_i sympleksu σ , rozpiętej przez wierzchołki $\{v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{k+1}\}$ (czyli wszystkie wierzchołki sympleksu σ za wyjątkiem v_i), mają współrzędne barycentryczne, dla których $t_i = 0$.

Jeżeli przestrzeń \mathbb{R}^{k+1} w odpowiedni sposób podzielimy na sympleksy, to mówimy, że zdefiniowaliśmy triangulację przestrzeni \mathbb{R}^{k+1} . Trochę ściślej przedstawi to następująca definicja.

Definicja 3.4. Triangulacją \mathbb{T} przestrzeni \mathbb{R}^{k+1} nazywamy taki jej podział na przeliczalnie wiele $(k + 1)$ -wymiarowych sympleksów, że

- i) jeżeli dla $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{T}$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$ mamy $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$, to część wspólna $\sigma_1 \cap \sigma_2$ jest k -wymiarową ścianą obu sympleksów;
- ii) każdy ograniczony zbiór $A \subset \mathbb{R}^{k+1}$ przecina się ze skończenie wieloma sympleksami $\sigma \in \mathbb{T}$.

Triangulację przestrzeni \mathbb{R}^{k+1} definiować można na wiele sposobów, warto jednak robić to w jakiś uporządkowany sposób. Przykładem takiej uporządkowanej konstrukcji jest triangulacja Coxetera-Freudenthala-Kuhna (opisana w [1]). Nie będzie nas jednak zajmowało to jak podzielić przestrzeń \mathbb{R}^{k+1} na sympleksy – a raczej jak wykorzystać ten podział do śledzenia zbioru zer odwzorowania f . Potrzebny nam będzie jeszcze pewien sposób poruszania się po zdefiniowanej triangulacji.

Definicja 3.5. Piwotem (*ang. pivoting step*) nazywamy następującą operację:

1. dla ustalonego sympleksu $\sigma \in \mathbb{T}$ wybieramy jeden z wierzchołków v_i , wyznacza on k -wymiarową ścianę $V_i \subset \sigma$, nie zawierającą tego wierzchołka;
2. wybieramy dokładnie jeden wierzchołek v'_i taki, że $\sigma' = \text{conv}\{v'_i, V_i\} \in \mathbb{T}$.

Przyporządkowanie $v_i \mapsto v'_i$ nazywamy *piwotem*.

Możemy teraz przystąpić do zdefiniowania algorytmu PL. Oparty jest on na pewnej predefiniowanej triangulacji \mathbb{T} przestrzeni \mathbb{R}^{k+1} . Dla tej triangulacji definiujemy kawałkami afiniczne odwzorowanie $f_{\mathbb{T}}: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$. Zrealizować to możemy w naturalny i nieskomplikowany sposób: przede wszystkim ustalamy, że dla wszystkich wierzchołków v należących do triangulacji \mathbb{T}

$$f_{\mathbb{T}}(v) = f(v).$$

Następnie odwzorowanie $f_{\mathbb{T}}$, na każdym sympleksie $\sigma \in \mathbb{T}$, przedłużamy do odwzorowania afinicznego, tj.

$$f_{\mathbb{T}}(t_0 v_0 + t_1 v_1 + \dots + t_{k+1} v_{k+1}) = t_0 f_{\mathbb{T}}(v_0) + t_1 f_{\mathbb{T}}(v_1) + \dots + t_{k+1} f_{\mathbb{T}}(v_{k+1}).$$

W ten sposób odwzorowanie $f_{\mathbb{T}}$ zdefiniowane jest na całej przestrzeni \mathbb{R}^{k+1} – pozostaje jednak sprawdzić, czy definicja ta jest jednoznaczna, tzn. czy wartości uzyskane na częściach wspólnych różnych sympleksów są takie same. Nie ma z tym jednak żadnych problemów ponieważ triangulacja została zadana w taki sposób by części wspólne różnych sympleksów były ich k -wymiarowymi ścianami. A punkty leżące na takiej k -wymiarowej ścianie V_i mają dokładnie te same współrzędne barycentryczne – niezależnie od tego, którego sympleksu ściana V_i jest częścią.

W ten sposób uzyskujemy kawałkami afiniczne odwzorowanie $f_{\mathbb{T}}$, które uważać możemy za aproksymację odwzorowania f . I to aproksymację, która dość łatwo poddaje się przeróżnym obliczeniom. W szczególności możemy przypuszczać, że zbiór $f_{\mathbb{T}}^{-1}(0)$ będzie aproksymować zbiór $f^{-1}(0)$. Kilka słów na ten temat poniżej.

Okazuje się, że – podobnie jak w przypadku odwzorowań klasy C^1 omówionych powyżej – i tutaj możemy zdefiniować wartości regularne odwzorowania $f_{\mathbb{T}}$; co więcej i tu można pokazać, że mamy do czynienia z sytuacją analogiczną dla twierdzenia Sarda, tzn. nawet jeśli 0 nie jest wartością regularną $f_{\mathbb{T}}$, to istnieją dowolnie małe wartości regularne tego odwzorowania (po szczegóły odsyłamy Czytelnika do książki [1], ze szczególnym naciskiem na początek rozdziału 12.2). Aby zobaczyć, jakie własności ma wartość regularna odwzorowania $f_{\mathbb{T}}$ popatrzmy na następującą definicję

Definicja 3.6. Mówimy, że $x \in \mathbb{R}^{k+1}$ jest wartością regularną odwzorowania $f_{\mathbb{T}}$ gdy

- i) x nie należy do żadnej ze ścian sympleksów triangulacji \mathbb{T} wymiaru mniejszego niż k (w szczególności nie jest wierzchołkiem żadnego sympleksu);
- ii) jeśli $x \in \sigma \in \mathbb{T}$, to pochodna $Df_{\mathbb{T}}|_{\sigma}(x)$ jest maksymalnego rzędu.

Jeżeli dla $y \in \mathbb{R}^k$ zbiór $f_{\mathbb{T}}^{-1}(y)$ zawiera jedynie punkty regularne, to mówimy, że y jest wartością regularną.

Nie będziemy przytaczać tu pozostałych technicznych definicji i twierdzeń związanych z regularnością – wydają się one nie być potrzebne dla zrozumienia istoty algorytmu.

Przechodzimy więc do rozwiązania równania

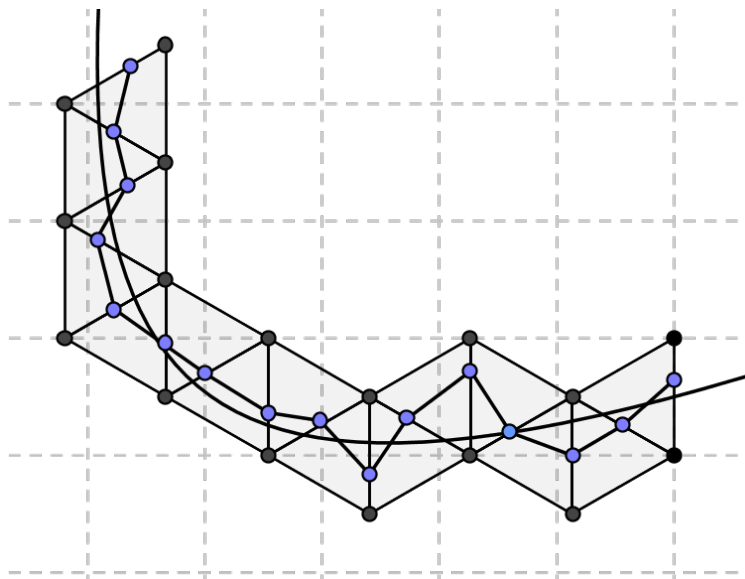
$$f_{\mathbb{T}}(x) = 0.$$

Oczywiście możemy to równanie stosunkowo łatwo rozwiązać w każdym z sympleksów – popatrzmy bowiem:

$$(3.1) \quad \begin{cases} f_{\mathbb{T}}(x) = 0, \\ x \in \sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_0 f_1(v_0) + t_1 f_1(v_1) + \dots + t_{k+1} f_1(v_{k+1}) = 0, \\ t_0 f_2(v_0) + t_1 f_2(v_1) + \dots + t_{k+1} f_2(v_{k+1}) = 0, \\ \dots \\ t_0 f_k(v_0) + t_1 f_k(v_1) + \dots + t_{k+1} f_k(v_{k+1}) = 0, \\ t_0 + t_1 + \dots + t_{k+1} = 1, \\ t_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, k+1. \end{cases}$$

Czyli właściwie wystarczy znaleźć nieujemne rozwiązania pewnego liniowego układu $k+1$ równań z $k+2$ niewiadomymi t_0, t_1, \dots, t_{k+1} – co wydaje się niezbyt trudnym zadaniem – i rzeczywiście, generalnie wiadomo jak do tego podejść (i analitycznie i numerycznie).

Oczywiście jednak rozwiązywanie takiego układu równań dla każdego sympleksu z osobna jest poważnym marnotrawstwem – warto podejść do tego inaczej. Jeżeli popatrzmy na rozwiązanie powyższego problemu liniowego jako na pewną podprzestrzeń liniową \mathbb{R}^{k+1} przesuniętą o pewien wektor – a właściwie na część wspólną tej podprzestrzeni z sympleksem σ widzimy, że zbiór $f_{\mathbb{T}}^{-1}(0)$ jest łamaną w \mathbb{R}^{k+1} . Aby ją prześledzić, wystarczy zidentyfikować ściany sympleksu, przez który łamana przechodzi – a następnie wykonać odpowiedni piwot i przenieść się do sąsiedniego sympleksu, w którym poszukamy następnego fragmentu łamanej.



RYSUNEK 2. Śledzenie krzywej za pomoc algorytmu PL

W praktyce implementacja tej metody nie musi się jednak opierać na rozwiązywaniu układów równań liniowych (i to przy dodatkowych ograniczeniach na znak rozwiązania) – lecz na nieco innym podejściu. Otóż kiedy patrzymy na $(k + 1)$ -sympleks, to staramy się zlokalizować dwie z jego k -wymiarowych ścian, które zawierają zera odwzorowania $f_{\mathbb{T}}$. W praktyce wygodnym pomysłem okazuje się tu być wprowadzenie dla dowolnej k -wymiarowej ściany $V = \text{conv}\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ tzw macierzy znakującej (ang. *labelling matrix*) danej jako:

$$\mathcal{L}(V) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ f(v_0) & \dots & f(v_k) \end{bmatrix},$$

gdzie wektory $f(v_i)$ zapisane są jako kolumny.

Definicja 3.7. Mówimy, że k -sympleks V jest całkowicie oznakowany, jeśli:

- i) macierz $\mathcal{L}(V)$ jest nieosobliwa;
- ii) macierz $\mathcal{L}(V)^{-1}$ jest leksykograficznie dodatnia, tzn. pierwsza niezerowa wartość w każdym z wierszy jest dodatnia.

Pokazać można ([1], def. 12.3.1 oraz własność 12.3.2), że jeśli V jest k -wymiarową ścianą sympleksów należących do triangulacji \mathbb{T} , to jest ona całkowicie oznakowana wtedy i tylko wtedy gdy istnieje pewne otoczenie 0 w \mathbb{R}^k , takie, że dla każdego c z tego otoczenia $f_{\mathbb{T}}^{-1}(c) \cap V \neq \emptyset$. Czyli ściany całkowicie oznakowane nie tylko zawierają zera $f_{\mathbb{T}}$, ale zawierają zera stabilne ze względu na drobne perturbacje. Czyli intuicyjnie: łamana $f_{\mathbb{T}}^{-1}(0)$ *przebiega* ścianę V , a nie *odbija się* od niej. Widać, że zamiast rozwiązywać w sympleksie σ układ liniowy (3.1) wystarczy zidentyfikować te jego k -wymiarowe ściany, które są całkowicie oznakowane. Na pierwszy rzut oka może się to wydawać nie specjalnie lepszym pomysłem niż rozwiązywanie układu równań liniowych (w końcu musimy odwracać macierz) – w praktyce można jednak podać efektywne metody pozwalające wykryć ściany całkowicie oznakowane bez odwracania macierzy, a jedynie przy pomocy stosunkowo prostej algebry liniowej (szczegóły [1] rozdział 12.4).

Ale wiemy też dużo więcej:

Twierdzenie 3.8 ([1], 12.3.8, door-in-door-out principle). *Jeżeli sympleks $\sigma \in \mathbb{T}$ zawiera przynajmniej jedną k -wymiarową ścianę, która jest całkowicie oznakowana, to posiada dokładnie dwie takie ściany.*

Czyli jeśli mamy jakikolwiek sympleks $\sigma_0 \in \mathbb{T}$, do którego należy zero $f_{\mathbb{T}}$, to wystarczy zidentyfikować dwie jego całkowicie oznakowane ściany, wykonując pivot względem jednej z nich wskoczyć do kolejnego sympleksu, znaleźć w nim drugą całkowicie oznakowaną ścianę itd. . . To już zaczyna wyglądać na rozsądny algorytm!

W ten sposób działanie algorytmu opisać można w sposób następujący:

- (1) Zaczynamy od sympleksu $\sigma_0 \in \mathbb{T}$ zawierającego k -wymiarową ścianę V_0 , która jest całkowicie oznakowana.
- (2) Mając sympleks $\sigma_n \in \mathbb{T}$ oraz jego wyróżnioną ścianę V_n wykonujemy pivot względem tej wyróżnionej ściany uzyskując sympleks $\sigma_{n+1} \in \mathbb{T}$.
- (3) Znajdujemy całkowicie oznakowaną ścianę $V_{n+1} \neq V_n$ sympleksu σ_{n+1} i wracamy do kroku 2.

Czy taka metoda działa? Tzn. czy uzyskany przy jej pomocy zbiór rozwiązań aproksymuje zbiór $f^{-1}(0)$? Odpowiedzią niech będzie kolejne twierdzenie

Twierdzenie 3.9 ([1], 15.5.2). *Załóżmy, że $f: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest klasy C^2 oraz $x \mapsto Df(x)$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą L na pewnym wypukłym zbiorze $U \subset \mathbb{R}^{k+1}$. Wówczas*

$$|f(x) - f_{\mathbb{T}}(x)| \leq \frac{1}{2}L\delta^2,$$

dla $x \in U$ oraz δ równej największej średnicy sympleksów triangulacji \mathbb{T} .

Oczywiście algorytm ten może mieć problemy w sytuacji gdy 0 nie jest wartością regularną $f_{\mathbb{T}}$. A nawet jeśli problemów nie będzie miał, to na pewno w sytuacji gdy w zbiorze $f_{\mathbb{T}}^{-1}(0)$ występują punkty bifurkacji, nie zidentyfikuje całego zbioru rozwiązań (ze względu na *door-in-door-out principle* wybierze tylko jedną z przecinających się krzywych). Oczywiście i temu można jakoś zaradzić. Wśród wielu różnych pomysłów wspomnieć warto algorytm FSC („Follow Sign Changes”) podany w pracy [8]. Algorytm ten nie tylko nie wymaga żadnych szczególnych manipulacji na macierzach ale również nie pociąga za sobą żadnej zasady w rodzaju *door-in-door-out*. Poniżej podamy jego szkic – do wszelkich uzasadnień odsyłamy do pracy [8].

- (1) Zaczynamy od początkowego $(k + 1)$ -wymiarowego sympleksu σ_0 zawierającego znane nam zero odwzorowania f .
- (2) Dla danego sympleksu σ_n sprawdzamy, która spośród $k + 2$ ścian wymiaru k powinna zostać odrzucona. k -wymiarowa ściana $V \subset \sigma_n$ powinna zostać odrzucona jeśli na jej $k + 1$ wierzchołkach przynajmniej jedna z funkcji współrzędnych f_i ($i = 1, \dots, k$) ma stały znak.
- (3) Dla każdej ściany, która nie została odrzucona wykonujemy względem niej pivot i uzyskany $(k + 1)$ -sympleks zapamiętujemy na stosie w celu dalszego przetwarzania (przed zapamiętaniem sprawdzamy czy ten sympleks był już przetworzony – jeśli tak, to nie ma potrzeby zapamiętywania tego sympleksu). Każdy zapamiętany na stosie sympleks jest traktowany przez nas jako przybliżenie zera odwzorowania f .
- (4) Pobieramy sympleks ze stosu i wracamy do punktu (2).

4. METODA PC

Metoda predykcji-korekcji (ang. *Prediction-Correction method*) – zwana dalej metodą PC – oparta jest na zupełnie innych przesłankach. Tym razem musimy założyć, że odwzorowanie $f: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest klasy C^1 , zaś 0 jest jego wartością regularną. W tej sytuacji jeśli znamy jedno z zer odwzorowania f , tj. punkt $x_0 \in \mathbb{R}^{k+1}$ spełniający równość $f(x_0) = 0$, to na mocy rozważań z rozdziału pierwszego niniejszego omówienia, istnieje pewna krzywa $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$, klasy C^1 , $0 \in (a, b)$, dla której

- $\gamma(0) = x_0$,
- $f(\gamma(t)) = 0$,
- rząd macierzy $Df(\gamma(t))$ wynosi k ,
- $\gamma'(t) \neq 0$,
- $|\gamma'(t)| = 1$,

dla $t \in (a, b)$. Ostatni warunek nosi nazwę *parametryzacji naturalnej* krzywej i służy jedynie temu w następujących dalej rozumowaniach uniknąć pewnych komplikacji natury technicznej.

Zauważmy, że ponieważ $f(\gamma(t)) = 0$, to również

$$Df(\gamma(t))(\gamma'(t)) = 0,$$

czyli $\gamma'(t) \in \text{Ker } Df(\gamma(t))$, a to (ze względu na to, że jądro odwzorowania $Df(\gamma(t))$ jest jednowymiarowe) oznacza, że wektor $\gamma'(t)$ rozpina jądro odwzorowania $Df(\gamma(t))$. Tym samym macierz kwadratowa (wymiaru $k + 1$)

$$\begin{bmatrix} Df(\gamma(t)) \\ \gamma'(t)^T \end{bmatrix}$$

jest zawsze nieosobliwa (powyżej v^T oznacza wektor transponowany do v). W związku z powyższym wyznacznik

$$\det \begin{bmatrix} Df(\gamma(t)) \\ \gamma'(t)^T \end{bmatrix}$$

jest zawsze stałego znaku. A zatem ma sens następująca definicja:

Definicja 4.1. Mówimy, że krzywa γ spełniająca powyższe warunki jest dodatnio zorientowana jeśli

$$\det \begin{bmatrix} Df(\gamma(t)) \\ \gamma'(t)^T \end{bmatrix} > 0,$$

dla $t \in (a, b)$.

Za [1] (def. 2.1.7) możemy powtórzyć następującą definicję:

Definicja 4.2. Niech A będzie macierzą wymiaru $k \times (k + 1)$ rzędu k . Wówczas wyznaczony jednoznacznie wektor $\mathcal{T}(A) \in \mathbb{R}^{k+1}$ spełniający warunki

- i) $A(\mathcal{T}(A)) = 0$;
- ii) $|\mathcal{T}(A)| = 1$;
- iii) $\det \begin{bmatrix} A \\ \mathcal{T}(A)^T \end{bmatrix} > 0$;

nazywamy wektorem stycznym do macierzy A .

Rozważmy teraz następujące zagadnienie początkowe

$$(4.1) \quad \begin{cases} \gamma'(t) = \mathcal{T}(Df(\gamma(t))), \\ \gamma(0) = x_0. \end{cases}$$

Okazuje się, że zagadnienie to bardzo ściśle wiąże się z poszukiwaniem krzywych, dla których $f(\gamma(t)) = 0$.

Lemat 4.3 ([1], 2.1.12). *Jeżeli γ jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego (4.1), to $f(\gamma(t)) = 0$.*

Dowód. Zauważmy przede wszystkim, że

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = Df(\gamma(t))(\gamma'(t)).$$

Ale jeśli $\gamma(t)$ spełnia równanie

$$\gamma'(t) = \mathcal{T}(Df(\gamma(t))),$$

to z definicji odwzorowania \mathcal{T} musi być $Df(\gamma(t))(\gamma'(t)) = 0$, co oznacza, że $f(\gamma(t))$ jest funkcją stałą – a ze względu na warunek początkowy $\gamma(0) = x_0$ jest stale równa 0. \square

Stąd poszukiwanie krzywej γ można zastąpić rozwiązaniem zagadnienia początkowego (4.1). I tutaj można sięgać do całego arsenału środków oferowanych przez metody numeryczne dla zagadnień początkowych dla równań różniczkowych zwyczajnych (por. [5]). Jest wśród nich również (wcale nie najczęściej wykorzystywana) metoda predykcji-korekcji – okazuje się jednak, że w naszym kontekście sprawdza się bardzo dobrze. Nie będziemy tu jednak bezpośrednio stosować żadnego z klasycznych rozwiązań tego typu (choćby tych opisanych w [5]) lecz nieco ją przeformułujemy. Możemy sobie na to pozwolić ponieważ szukamy rozwiązań bardzo szczególnego równania różniczkowego – takiego, na którym f jest stała.

Nasz algorytm składać się będzie z powtarzanych po sobie kroków predykcji i korekcji. Załóżmy więc, że jesteśmy w n -tym kroku naszej procedury, tj. znaleźliśmy punkt x_n , n -ty kolejny punkt znajdujący się (oczywiście w przybliżeniu) na śledzonej przez nas krzywej. Krok predykcji zakłada, że przesuwamy się po krzywej całkowej – czyli rozwiązujemy w sposób przybliżony równanie różniczkowe. Zacząć można od najprostszej chyba metody – czyli metody Eulera. Dla ustalonego kroku całkowania $h > 0$ mamy

$$(4.2) \quad y_{n+1} = x_n + h\mathcal{T}(Df(x_n)).$$

W ten sposób otrzymujemy punkt, który (jak się spodziewamy) powinien leżeć na krzywej $\gamma(t)$. Może się jednak okazać, że $f(y_{n+1})$ różni się od zera, być może nawet znacznie. Gdybyśmy zaczęli od tego punktu kolejny krok całkowania numerycznego moglibyśmy błyskawicznie oddalić się od zbioru $f^{-1}(0)$. A tego nie chcemy. Pora więc na krok korekcji – polegający na znalezieniu takiego zera odwzorowania f , które leży najbliżej punktu y_{n+1} danego wzorem (4.2). Szukamy więc $x_{n+1} \in \mathbb{R}^{k+1}$, dla którego

$$(4.3) \quad |x_{n+1} - y_{n+1}| = \min_{x \in f^{-1}(0)} |x - y_{n+1}|.$$

Aby tego typu problem rozwiązać warto zdać sobie sprawę, że niekoniecznie musimy poszukiwać zera x_{n+1} optymalnego w sensie wzoru (4.3). Wystarczy nam jakiegokolwiek zero leżące blisko y_{n+1} . Dlaczego więc nie wykorzystać choćby metody Newtona? Klasyczna metoda Newtona działa (przy określonych założeniach) dla odwzorowań $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ klasy C^1 . W naszej sytuacji

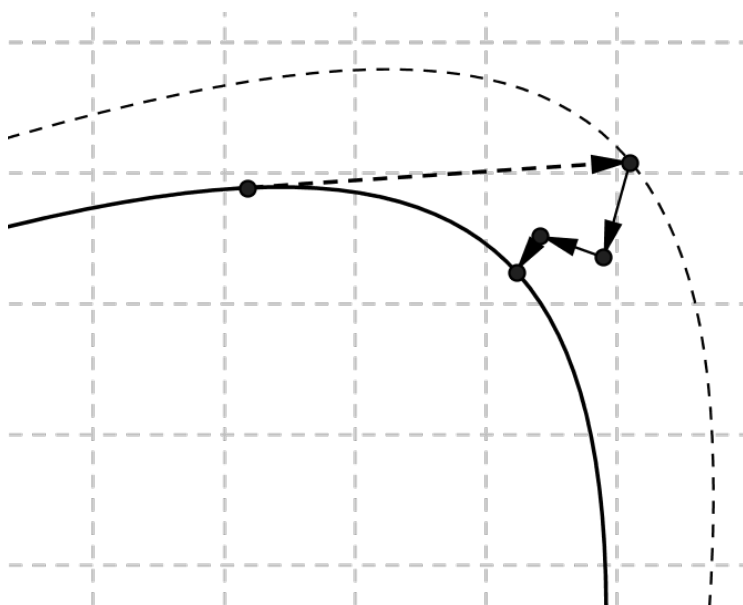
wymiary dziedziny i przeciwdziedziny są różne musimy więc skorzystać z pewnej modyfikacji zaproponowanej w pracy [3]. Zaproponowane są tam iteracje postaci:

$$(4.4) \quad w_{l+1} = w_l - Df(w_l)^+(f(w_l)),$$

gdzie A^+ oznacza uogólnioną macierz odwrotną (Moore'a-Penrose'a) macierzy A (por [4]).

W naszym przypadku algorytm korekcji polega na zastosowaniu wzoru (4.4) tak długo, aż osiągniemy zakładaną dokładność – ostatnia z uzyskanych wartości w_{l+1} będzie kolejnym przybliżeniem x_{n+1} .

W ten sposób algorytm daje nam ciąg punktów, które – połączone odcinkami – dają nam łamaną przybliżającą krzywą $\gamma(t)$. Idea postępowania pokazana jest na rysunku 3.



RYSUNEK 3. Śledzenie krzywej za pomoc algorytmu PC. Linia ciągłą pokazuje poszukiwaną krzywą. Strzałka przerywana pokazuje krok predykcji przenoszący nas na inną krzywą całkową (oznaczoną linią przerywaną). Strzałki ciągłe pokazują trzy kroki korekcji.

Przedstawiony tu opis jest dalece niekompletny – w szczególności nie wynika z niego jak efektywnie wykonać następujące kroki:

- znaleźć przybliżenie $Df(x_n)$,
- wybrać krok całkowania w metodzie Eulera,
- znaleźć $\mathcal{T}(Df(x_n))$,
- znaleźć $Df(y_n)^+$.

Wiele pomysłów i szczegółowych rozwiązań znaleźć można w monografii [1]. Warto zakończyć twierdzeniem pokazującym, że opisana metoda działa.

Twierdzenie 4.4 ([2], tw. 3.2). *Niech $f: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ będzie odwzorowaniem klasy C^1 , dla którego 0 jest wartością regularną. Niech $\gamma_h(t)$ będzie łamaną generowaną przez algorytm PC dla kroku Eulera równego $h > 0$. Niech $\gamma(t)$ będzie krzywą w zbiorze $f^{-1}(0)$ taką, że $\gamma(0) = \gamma_h(0) = x_0$*

i obydwie te krzywe mają naturalną parametryzację. Jeżeli $A(x)$ jest aproksymacją pochodnej $Df(x)$, dla której $\|A(x) - Df(x)\| = O(h)$ jednostajnie w zbiorze rozwiązań, to

$$|f(\gamma_h(t))| \leq O(h^2)$$

oraz

$$|\gamma_h(t) - \gamma(t)| \leq O(h^2).$$

5. PODSUMOWANIE

Przedstawiliśmy tutaj przegląd kilku metod śledzenia krzywych zadanych przy pomocy równania uwikłanego $f(x) = 0$ gdzie $f: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest odwzorowaniem ciągłym lub odpowiednio gładkim. Materiał znajdujący się powyżej powinien być traktowany jedynie jako prezentacja podstawowych pomysłów – z których każdy ma swoje wady i zalety. Warto jednak zdawać sobie sprawę, że taka klasa metod numerycznych istnieje i na jakich pomysłach się opiera. Tematyka ta jest stosunkowo dobrze opisana od lat 90 XX wieku jednak ciągle pojawiają się tu nowe (choć może nie rewolucyjne) pomysły.

Opisane tu dwie kategorie metod mają swoje liczne rozszerzenia, usprawnienia czy szczególne wersje (np. wykrywające na krzywych różnego rodzaju szczególne punkty) – nie ma tu jednak miejsca na omawianie potencjalnych modyfikacji czy rysujących się problemów. Podsumujemy jednak w kilku słowach obydwie pokazane metody:

- Metoda PL może być stosowana dla odwzorowań niekoniecznie gładkich (co nie znaczy, że zawsze dla nich działa) – charakteryzuje się jednak stałym krokiem, z którym poruszamy się po krzywej.
- Metoda PC działa jedynie dla odwzorowań gładkich – daje jednak możliwość wykonywania dosyć długich skoków po krzywej γ (oczywiście przy modyfikacjach, które pozwalają dobierać długość kroku Eulera w zależności od sytuacji) – tym samym ma szansę być znacząco szybsza od metody PL. Warto zauważyć, że różniczkowalność f nie jest niezbędna do kroku korekcji – zamiast metody Newtona wykorzystać można inne metody (jak choćby zmodyfikowaną metodę Newtona zaproponowaną w pracy [7]).

LITERATURA

- [1] E.L. Allgower, K. Georg, *Introduction to Numerical Continuation Methods*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
- [2] E.L. Allgower, K. Georg, *Continuation and Path Following*, Acta Numerica 2: 1–64, 1993.
- [3] A. Ben-Israel, *A Newton-Raphson method for the solution of systems of equations*, J. Math. Anal. Appl. 15: 243–252, 1966.
- [4] A. Ben-Israel, T. Greville, *Generalized Inverses*, Springer-Verlag, 2003.
- [5] J.C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, New York: John Wiley & Sons, 2003.
- [6] Y.J. Cho, Y-Q. Chen, *Topological Degree Theory and Applications*, Chapman and Hall, 2006.
- [7] X.C., Tetsuro Yamamoto, *Newton-like methods for solving underdetermined nonlinear equations with nondifferentiable terms*, Journal of Computational and Applied Mathematics 55(3): 311–324, 1994.
- [8] J. Gulgowski, J.J. Michalski, *Topological attitude towards path following, applied to localization of complex dispersion characteristics for a lossy microwave, ferrite-coupled transmission line*, IMA J. Appl. Math. 80(2): 494–507, 2015.
- [9] M.W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer-Verlag New York, 1976.
- [10] T.Y. Li, *Numerical solution of multivariate polynomial systems by homotopy continuation methods*, Acta Numerica, 399–436, 1997.
- [11] J. Milnor, *Topology from differentiable viewpoint*, Princeton University Press, 1997.

- [12] W.C. Rheinboldt, *Numerical continuation methods: a perspective*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 124(1-2): 229–244, 2000.

JACEK GULGOWSKI

INSTYTUT MATEMATYKI, UNIWERSYTET GDAŃSKI, UL. WITA STWOSZA 57, 80-952 GDAŃSK

Adres e-mail: Jacek.Gulgowski@mat.ug.edu.pl