Centrum Zastosowań Matematyki

ISBN 978-83-942807-6-5
PORTAL CZM 2015

WZGLĘDNY NIEDOSTATEK, CZYLI MATEMATYCZNE MODELOWANIE ZAWIŚCI

GRZEGORZ KOSIOROWSKI

STRESZCZENIE. Artykuł ma na celu przedstawienie idei względnego niedostatku i jej istotności w wyjaśnianiu motywacji ludzkich działań. W szczególności, prezentuje ścisłą matematycznie definicję tego pojęcia i sposoby jej zastosowania w modelowaniu zjawisk ekonomiczno-społecznych za pomocą teorii gier. Przedstawione są też dwa przykładowe modele wyjaśniające niebanalne skutki redystrybucji dóbr oraz motywacje imigrantów podejmujących decyzję o asymilacji (lub jej braku) w nowym miejscu pobytu.

1. WSTĘP

Modelowanie matematyczne w naukach społecznych cieszy się (czasami zasłużoną) złą sławą. W takich badaniach praktycznie nigdy nie mamy pełnych danych o rozważanym układzie, związki pomiędzy bodźcami i reakcjami są niejasne i różne dla różnych osób, a rozważane systemy składają się z wielu powiązanych różnymi relacjami ludzi – co powoduje, że nawet z pełną informacją o dynamice i sytuacji początkowej, rozwiązanie modelu może być poza zasięgiem naszych możliwości obliczeniowych. Z kolei nadmierne upraszczanie modelu lub dokładanie technicznych założeń umożliwiających jego rozwiązanie grozi kompletnym oderwaniem prowadzonych badań od rzeczywistości i uzyskaniem mylących wyników.

Jednakże, modele matematyczne pozwalają uzyskać rozliczne korzyści. Po pierwsze, precyzyjne sformułowanie zagadnienia w języku matematyki często rozwiewa niejasności w rozumieniu pojęć i umożliwia racjonalną dyskusję. Po drugie, badanie „świata wyidealizowanego” ma też swoje zalety: możemy analizować wpływ pewnych bodźców na ludzkie działanie przy pominięciu wielu czynników, które w realnym świecie uniemożliwiają udzielenie jednoznacznej odpowiedzi. Uproszczenie w takim modelu co prawda uniemożliwia matematyczny dowód, że jakieś zjawisko faktycznie zachodzi w rzeczywistości, ale pozwala nam dostrzec możliwość jego zaistnienia – lub czasem udowodnić, że nie jest ono możliwe. Taki model czasem wykrywa możliwość wystąpienia paradoksalnych efektów (jak zobaczymy przy okazji modelu redystrybucji dóbr), które wykraczają poza „zdroworozsądkowe” rozumowanie, a następnie poddać tę możliwość bardziej szczegółowym badaniom. Po trzecie, analiza matematycznego modelu jest to często jedyna szansa

Pracę wykonano w ramach projektu Centrum Zastosowań Matematyki, współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

na wykrycie działania jakiegoś bodźca, którego istnienie grupa objęta badaniem chciałaby zataić. Dobrym przykładem jest właśnie wszelkie działanie oparte na zawiści[1]: wykrywamy je obserwując, że członkowie grupy działają tak, jak przewiduje uwzględniający zawiść model, nawet jeśli w ankietach zaprzeczają, jakoby takie uczucie na nich miało wpływ. Mam nadzieję, że każdy z modeli przedstawionych w tym artykule ma przynajmniej jedną, a czasami kilka z tych zalet.

Chyba najtrudniejszym aspektem realistycznego modelowania matematycznego zagadnień ekonomicznych jest właściwe wyznaczenie funkcji użyteczności (zwanych też funkcjami celu lub wypłatami), które decydują o zachowaniu poszczególnych osób. Zakładamy, że każdy gracz (czyli osoba opisywana przez model) przypisuje każdej możliwej końcowej sytuacji pewną wartość (czyli właśnie użyteczność) i stara się zachowywać tak, by ta końcowa użyteczność była dla niego jak największa. Takie zachowanie nazywamy *racjonalnym*[2].

Najprostsze, klasyczne modele ekonomiczne uwzględniają dwie podstawowe składowe użyteczności: korzyść (np. uzyskanie dochodu), zwiększająca tę użyteczność i koszt uzyskania tej korzyści (np. pracę), który tę użyteczność zmniejsza. Oczywiście, każda z tych składowych może dzielić się na mniejsze części. Jednakże, ograniczenie się do takich funkcji użyteczności nie wystarcza do realistycznego opisu świata. Najbardziej znanym tego przykładem jest gra znana jako *ultimatum*.

W najprostszej formie tej gry, po raz pierwszy ściśle zdefiniowanej w artykule [3] biorą udział dwaj gracze, którzy mają podzielić pewną pulę pieniędzy – powiedzmy 100 dolarów. Pierwszy gracz proponuje dowolny sposób podziału, a drugi gracz ma wybór: albo zaakceptować zaproponowany podział albo go odrzucić. W pierwszym wypadku gracze otrzymują kwoty wyznaczone przez pierwszego gracza, w drugim – obaj nie otrzymują nic. Zgodnie z modelem standardowym, żaden z graczy nie ponosi żadnego kosztu, więc użyteczności obydwu powinny być równe kwocie pieniędzy otrzymanej na koniec gry[3]. Dlatego, racjonalny gracz drugi powinien zawsze przyjmować ofertę pierwszego gracza, o ile tylko daje mu ona jakąkolwiek dodatnią ilość pieniędzy – w końcu zawsze lepiej mieć cokolwiek niż nic. Jednakże, przeprowadzone eksperymenty wskazywały na co innego: prawdziwi gracze bardzo rzadko zgadzali się na propozycje podziału w proporcji gorszej niż $75 : 25$. Do tej pory przedstawiono wiele propozycji wyjaśnienia tego fenomenu,

---

[1] W całym artykule używamy słowa zawiść, a nie zazdrość, by podkreślić, że chodzi o uczucie dyskomfortu z faktu, że ktoś posiada więcej, a nie zwykłe pragnienie posiadania dóbr bądź umiejętności, których nie mamy, a posiada je ktoś inny.

[2] Nie należy często mylić tego ściśle zdefiniowanego pojęcia z potocznie pojmowaną racjonalnością tj. zachowaniem, które większość ludzi uznaje za rozsądne. Na przykład racjonalnym dla uzależnionego od narkotyków jest wydanie resztki swoich pieniędzy na kolejną działkę, bo jego funkcja użyteczności wskazuje, że ceni on ten narkotyk bardziej niż jakiekolwiek inne potrzeby życiowe. Racjonalnym może być danie jałmużny żebrakowi, o ile pomoc innej osobie z jakichkolwiek przyczyn daje większy wzrost funkcji użyteczności niż dodatkowe kilka złotych – nawet jeśli osoba skupiona tylko na zysku finansowym nazwie takie działanie nieracjonalnym.

[3] Funkcja użyteczności jest bytem abstrakcyjnym, obrazującym tylko skalę preferencji danego gracza, dlatego nie jest istotny jej dokładny wzór, a tylko sposób, w jaki segreguje ona możliwe końcowe rezultaty gry od najkorzystniejszych do najmniej korzystnych. Dlatego w szczególności można zawsze funkcję użyteczności złożyć z dowolną funkcją rosnącą i rezultat nadal będzie funkcją użyteczności ilustrującą preferencje danego gracza. Jeśli w danym przykładzie x jest kwotą otrzymaną na koniec gry, to zarówno $u(x) = x$, $u(x) = \sqrt{x}$, jak i $u(x) = x^3 + x + 7$ może definiować wzór funkcji użyteczności gracza i wszystkie te wzory reprezentują te same preferencje gracza i prowadzą do takiego samego rozwiązania gry. W istocie zatem użyteczność nie jest funkcją lecz całą klasą abstrakcji takich funkcji. W artykule, dla jasności wywodu, nie prowadzimy tego typu analiz i zawsze wybieramy możliwie najprostszą z możliwych funkcji użyteczności reprezentującą dane preferencje.

jednak najbardziej przekonujące według mnie są te, które kładą nacisk na dyskomfort powodowany przez świadomość, że ktoś posiada więcej od nas. To uczucie jest znane ludzkości od zawsze i zwane jest *zawiścią*.

2. Zawiść i względny niedostatek – wstępne informacje

Zawiść jako bodziec ludzkiego działania pojawia się w całej historii każdego społeczeństwa całego świata. Termin oznaczający to uczucie pojawia się w prawie wszystkich językach – od najbardziej prymitywnych po współczesne. Jest omawiana na setki sposobów przez przysłowia rozmaitych kultur. Często służy jako narzędzie fabularne w dziełach literackich, czy filmach, a na jej podstawie są zbudowane całe doktryny polityczne. Warto zauważyć, że zawiść, chociaż najczęściej postrzegana jako czynnik destruktywny, może też pełnić rolę poniekąd pozytywną: obawa przed wzbudzeniem zawiści zmusza ludzi do dostosowania się do norm społecznych – w istocie, czyni ona możliwą jakąkolwiek organizację społeczeństwa. Przykładowo, niejeden totalitarny reżim upadł pod ciężarem oburzenia ludzi nie z powodu łamania prawa, czy szczególnego okrucieństwa, ale przez nadmierną rozrzutność panujących, która wzbudziła zawiść w poddanych.

Nie będziemy tutaj przedstawiać pełnej analizy roli zawiści w socjologii, ekonomii i historii ludzkości. Praktycznie pełny wywód na temat zarówno negatywnych jak i pozytywnych jej skutków oraz przegląd jej objawów w najróżniejszych kontekstach i kulturach przedstawia Helmut Schoeck w swojej (niedawno przetłumaczonej na język polski) monografii [5]. Najważniejszy dla naszych celów jest fakt, że zawiść jest trudna do zbadania za pomocą narzędzi nauk społecznych, gdyż jest uczuciem, którego ludzie najbardziej się wstydzą, nawet sami przed sobą. O ile w anonimowych ankietach ludzie nie unikają przyznawania się do niechęci, a nawet nienawiści do innych osób i grup, to na ich podstawie można by powiedzieć, że nikt nie odczuwa zawiści. Nawet jeśli ktoś w takiej ankiecie porównuje się z inną osobą o wyższym statusie materialnym, społecznym, czy jakimkolwiek innym i przyznaje się do negatywnych uczuć z tym związanych, najczęściej klasyfikuje to jako „poczucie niesprawiedliwości”, niezależnie od tego, jak bardzo ta druga osoba na swój status zasłużyła.

W języku potocznym jednoznacznie potępia się odczuwanie zawiści, więc samo określenie „zawiścią” pewnego bodźca wpływającego na ludzkie zachowanie mogłoby mu z góry nadać ściśle negatywne konotacje, co utrudnia obiektywną, naukową analizę problemu. Dlatego, składową funkcji użyteczności odpowiedzialną za dyskomfort wynikający z dokonywania porównań swojego stanu posiadania ze stanem posiadania innych będziemy nazywać *względnym niedostatkiem* (ang. *relative deprivation*). Jednakże, trudno obronić punkt widzenia, który pomijałby dominującą rolę zawiści jako składowej poczucia względnego niedostatku. Interpretowaniu tego uczucia jako protestu wobec niesprawiedliwości przeczy fakt, że ludzie odczuwają ten dyskomfort bez rozważania sposobów dojścia do obecnego stanu posiadania. Przykładowo, niezależnie jak wielkiej ilości pracy i inteligencji potrzebowałby przedsiębiorca, by odnieść sukces, niezależnie jak uczciwie postępowałby w stosunku do swoich pracowników i kontrahentów, jego dobrobyt zawsze będzie przykładem niesprawiedliwości i wyzysku według wielu osób z jego otoczenia. Z bliższych nam zagadnień, w grze *ultimatum* odrzucanie ofert jest uzasadniane najczęściej poczuciem niesprawiedliwości, mimo, że gracz decydujący o przyjęciu oferty sam nie zrobił niczego, by w jakimkolwiek sensie zasłużyć na większy zysk z tej gry. Inna interpretacja względnego niedostatku: „preferencja równości dochodów” również ma swoje słabe strony. Gdyby taka preferencja była uniwersalna, byłaby odczuwana mniej więcej jednakowo przez wszystkich, niezależnie od poziomu dochodów.

Tymczasem, zgodnie z badaniami z kolejnego akapitu, taką preferencję wykazują przede wszystkim osoby o niższym statusie materialnym. Dlatego uważam, że *zawiść* jest główną składową odczucia nazywanego w tym artykule *względnym niedostatkiem* i czytelnik, dla uproszczenia, może w praktyce te dwa pojęcia ze sobą utożsamiać.

Już Adam Smith dostrzegał znaczenie nie tylko bezwzględnego bogactwa, ale i względnego niedostatku. W „Bogactwie narodów” napisał: *Lniana koszula, na przykład, nie jest nikomu niezbędna do życia. Grecy i Rzymianie żyli, jak sądzę, całkiem wygodnie, nie używając lnu. Jednak w dzisiejszej Europie przeciętny pracownik byłby zawstydzony, gdyby nie mógł publicznie pokazać się w lnianej koszuli; ten niedostatek w naszych czasach wyznacza nieakceptowalny poziom biedy.* Jednak poważne ekonomiczne badania nad względnym niedostatkiem i jego efektami rozpoczęły się dopiero od artykułu Duesenberry'ego [2] w 1949 roku. Zawierał on, podpartą solidnymi argumentami, hipotezę, że w wielu sytuacjach zachowanie bogatszych ludzi wpływa na zachowanie biedniejszych, ale nie na odwrót. Innymi słowy, ludzie mają tendencję do porównywania swojej sytuacji materialnej do osób bogatszych i działania na podstawie tych porównań. Od tego czasu, hipoteza Duesenberry'ego była przedmiotem licznych eksperymentów i badań w naukach społecznych i wydaje się być uzasadniona w wielu sytuacjach. Nawet ograniczając się tylko do najnowszych badań, tezę tę potwierdzają np. wyniki z artykułów [8] (badania nad odczuwaniem zawiści z neurologicznego punktu widzenia), [4] i [1]. Zwłaszcza wyniki ankiet z dwu ostatnich publikacji wykazały, że na odczuwany przez ankietowanych dobrobyt wpływ ma często nie tyle bezwzględny dochód i poziom życia, lecz dochód względny, czyli dochód uzyskiwany „w porównaniu z sąsiadami”. Naturalnie, im „względnie bogatsi” byli sąsiedzi, tym niższy był deklarowany poziom szczęścia badanych. Dodatkowo, wpływ na dochód względny miało przede wszystkim porównanie z bogatszymi, czyli istotny dla ludzi był raczej względny niedostatek niż względne bogactwo, które można by zdefiniować jako zadowolenie z bycia bogatszym od innych.

Największe osiągnięcia w teorii względnego niedostatku są związane z osobą Odeda Starka, który wraz ze swoimi współpracownikami opublikował kilkadziesiąt artykułów na ten temat[4]. To właśnie Oded Stark wprowadził do ekonomii matematyczne modele oparte na ścisłej definicji względnego niedostatku, którą od tej pory będziemy się posługiwać.

W teorii względnego niedostatku kluczowe jest pojęcie grupy referencyjnej danej osoby. Jest ona zdefiniowana po prostu jako zbiór osób, z którymi dany człowiek się porównuje. Załóżmy, że grupa referencyjna składa się z n osób, a $x = (x_1, \ldots, x_n)$ jest wektorem dochodów tej grupy uporządkowanym tak, by $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. Jeśli x_i jest dochodem i-tej osoby[5], to:

Definicja 2.1. *Względnym niedostatkiem* dla i-tej osoby nazywamy sumę:

$$RD(x_i, x) = \frac{1}{n} \sum_{j=i+1}^{n} (x_j - x_i).$$

Naturalnie $RD(x_n, x) = 0$.

Definicja ta spełnia podstawowe założenia wspomniane w dotychczasowej analizie: najbogatszy osobnik w danej grupie nie odczuwa względnego niedostatku, zmiany dochodów wśród osób biedniejszych nie wpływają na względny niedostatek wśród osób bogatszych, wzrost dochodów

[4]Ze względu na mnogość tych artykułów, nie wymieniamy ich wśród literatury. Zainteresowany czytelnik znajdzie je na http://ostark.uni-klu.ac.at/

[5]Z przyczyn technicznych zakłada się zwykle, że każdy należy do swojej własnej grupy referencyjnej.

osób bogatszych powoduje wzrost względnego niedostatku osób biedniejszych i dodatkowo, odczuwany względny niedostatek zmniejsza się wraz ze wzrostem „względnej pozycji w rankingu bogactwa" (stąd czynnik $\frac{1}{n}$).

W jaki sposób używamy tego pojęcia? W najprostszych, standardowych modelach ekonomicznych opartych na teorii gier, funkcja użyteczności gracza składa się z użyteczności jego dochodu i „anty-użyteczności" wysiłku lub kosztu umożliwiającego jego uzyskanie (np. $U = U_1(Y) - U_2(C)$, $U = \frac{U_1(Y)}{U_2(C)}$, gdzie Y oznacza dochód, a C – koszt jego uzyskania). Względny niedostatek (RD) stanowi dodatkową składową „anty-użyteczności": $U = U_1(Y) - U_2(C) - U_3(RD)$ lub $U = \frac{U_1(Y)}{U_2(C)U_3(RD)}$. Wprowadzenie tej drobnej zmiany do znanych modeli niesie ze sobą zaskakująco daleko sięgające konsekwencje.

Gra *ultimatum* jest przykładem sytuacji, w której taka poprawka do standardowych funkcji użyteczności umożliwia zrozumienie zachowania graczy. Według klasycznego modelu, funkcje użyteczności obydwu graczy są równe ich końcowemu dochodowi – i taki model dawał wyniki niezgodne z rzeczywistym doświadczeniem. Rozważmy jednak funkcję użyteczności drugiego gracza w prostej postaci: $u_2 = Y - RD$, gdzie Y jest jego końcowym dochodem, a RD względnym niedostatkiem odczuwanym wobec grupy referencyjnej złożonej z obydwu graczy. Teraz, jeśli pierwszy gracz zaproponuje podział puli w stosunku $99 : 1$, przyjęcie tej oferty dałoby graczowi drugiemu użyteczność w wysokości $u = 1 - \frac{1}{2}(99 - 1) = -48$. Jako, że odrzucenie oferty daje wyższą użyteczność (równą 0), model, zgodnie z obserwacjami ze świata rzeczywistego, przewiduje, że gracz drugi zapewne ofertę odrzuci. Dla tak prostej funkcji użyteczności, gracz drugi przyjmie ofertę dopiero wtedy, gdy gracz pierwszy zaproponuje podział dla niego korzystniejszy niż $75 : 25$. Odpowiednio dopasowując wagi, jakie drugi gracz przykłada do otrzymanego dochodu i odczucia względnego niedostatku, możemy taką funkcją użyteczności wyjaśnić dowolny minimalny poziom akceptacji zaproponowanego podziału. Stąd wiemy, że względny niedostatek może być wyjaśnieniem reakcji uczestników eksperymentów opartych na tej grze.

Z artykułów Starka i jego współpracowników wynika kilka podstawowych możliwych reakcji na odczuwany względny niedostatek: zmniejszenie różnicy dochodów poprzez zwiększenie wysiłków lub zdobycie nowych umiejętności, zmianę środowiska porównawczego poprzez wyjazd (migrację), domaganie się redystrybucji dochodów od władz politycznych oraz działania skierowane bezpośrednio przeciw osobom bogatszym i sabotowanie ich przedsięwzięć. W kolejnych podrozdziałach przedstawimy dwa przykładowe modele, oparte na pracach [6] i [7], ilustrujące wykorzystanie pojęcia względnego niedostatku.

3. Względny niedostatek i redystrybucja dóbr

Jednym z najmodniejszych tematów badań współczesnej ekonomii są nierówności społeczne: co je powoduje, jakie są ich skutki i, co często kluczowe dla rozważań, jak je mierzyć i ewentualnie jak im przeciwdziałać. W szczególności, wielu ekonomistów gnębi następujące pytanie: jak to jest możliwe, że w czasie rozkwitu „państw opiekuńczych", oferujących rozliczne transfery dóbr w celu wsparcia najbiedniejszych obywateli, nierówności ekonomiczne wydają się rosnąć, a nie maleć. Jak za chwilę zobaczymy, jednym z wyjaśnień może być właśnie względny niedostatek.

Najbardziej chyba popularną miarą nierówności społecznych, której tu będziemy używać, jest tak zwany współczynnik Giniego. Dla dyskretnej populacji o wektorze dochodów $x = (x_1, \ldots, x_n)$

uporządkowanym tak, by $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, jest on zdefiniowany wzorem:

$$G(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (x_j - x_i)}{n \sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Jak widać, współczynnik Giniego rośnie wraz ze wzrostem nierówności dochodowych. Wydaje się, że w naturalny sposób spełnia on tak zwaną zasadę Pigou-Daltona, którą powinny spełniać wszystkie miary nierówności: transfer dochodu od osoby bogatszej do biedniejszej (o ile jest odpowiednio mały, tj. nie zmienia kolejności w „rankingu bogactwa") powoduje zmniejszenie współczynnika Giniego, czyli też zmniejszenie nierówności. Jednakże, przedstawiony poniżej model stawia tę „oczywistość" pod znakiem zapytania.

Rozważamy bardzo prosty model ekonomiczny państwa składającego się z dwóch obywateli: 1 i 2, kierujących się w swoich działaniach funkcjami użyteczności postaci:

$$u_1(c_1, e_1, r_1) = c_1 - 2e_1 - 4r_1^2, \;\; u_2(c_2, e_2, r_2) = c_2 - \frac{1}{2}e_2^2 - 4r_2^2,$$

gdzie przez c_i oznaczamy dochód i jednocześnie poziom konsumpcji, przez e_i – wysiłek konieczny do uzyskania tego poziomu konsumpcji, a $r_i = RD(c_i, c) = \frac{1}{2}\max\{c_{3-i} - c_i, 0\}$ (gdzie $c = (c_1, c_2)$), opisuje odczuwany przez obywatela i względny niedostatek. Zakładamy, że bez uwzględniania jakiejkolwiek redystrybucji dóbr, jednostka wysiłku umożliwia wyprodukowanie jednostki dochodu. W takiej sytuacji, obaj gracze maksymalizują swoją użyteczność, wybierając swój optymalny poziom wysiłku e_i^*. Łatwo udowodnić, że dla takiej pary funkcji użyteczności, konsumpcja (i wysiłek) obywatela 2 będzie zawsze większa, a następnie można optymalizować kolejno drugą i pierwszą funkcję użyteczności otrzymując optymalne poziomy wysiłku i konsumpcji:

$$c_1^* = e_1^* = \frac{1}{2}, \;\; c_2^* = e_2^* = 1.$$

W tej sytuacji, współczynnik Giniego

$$G = \frac{c_2^* - c_1^*}{2(c_2^* + c_1^*)} = \frac{1}{6}.$$

Załóżmy teraz, że jakiś polityk chce zmniejszyć nierówność dochodową w tym społeczeństwie i przeprowadza redystrybucję dóbr: obkłada obywatela 2 podatkiem w wysokości $\tau > 0$, zmniejszając o tyle jego konsumpcję i całą tę kwotę przekazuje na konsumpcję obywatelowi 1. Oczywiście, podatek ten jest na tyle mały, by obywatel 1 nie stał się teraz bogatszy od obywatela 2. Zatem w tym momencie relacje pomiędzy wysiłkiem a konsumpcją są następujące:

$$c_1 = e_1 + \tau, \;\; c_2 = e_2 - \tau.$$

Po dokonaniu powyższych podstawień, pamiętając, że $r_2 = 0$ i $r_1 = \frac{1}{2}(c_2 - c_1)$, funkcje użyteczności obydwu obywateli można przedstawić jako:

$$u_1(e_1, e_2, \tau) = (e_1 + \tau) - 2e_1 + (e_2 - e_1 - 2\tau)^2, \;\; u_2(e_2, \tau) = (e_2 - \tau) - \frac{1}{2}e_2^2.$$

Jeśli przy ustalonym τ zmaksymalizujemy u_2 ze względu na e_2, a następnie u_1 ze względu na e_1, to otrzymamy nowe optymalne poziomy wysiłku:

$$e_1^* = \frac{1}{2} - 2\tau, \;\; e_2^* = 1$$

i, co za tym idzie, nowe poziomy konsumpcji:

$$c_1^* = \frac{1}{2} - \tau, \quad c_2^* = 1 - \tau.$$

W tym momencie można zauważyć pierwszy paradoks – mimo transferu dóbr, konsumpcja biedniejszego gracza spadła. Co prawda, o tyle samo spadła konsumpcja obywatela bogatszego, ale jest to mniejszy spadek względny, więc można się spodziewać, że współczynnik Giniego (a więc mierzony w ten sposób poziom nierówności) się zwiększy w wyniku tej redystrybucji dóbr. Rzeczywiście:

$$G = \frac{c_2^* - c_1^*}{2(c_2^* + c_1^*)} = \frac{\frac{1}{2}}{3 - 4\tau} > \frac{1}{6}.$$

Podsumowując: w wyniku działań polityka-Janosika, który odebrał część dochodów bogatemu i oddał biednemu, dochody biednego spadły, a poziom nierówności wzrósł. To jednak nie koniec paradoksów – okazuje się, że mimo zmniejszenia dochodów i zwiększenia poziomu nierówności, obywatel 1 jest zadowolony z tych działań. Wystarczy sprawdzić, że jego użyteczność przed redystrybucją wynosiła:

$$u_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = -\frac{3}{4},$$

natomiast po dokonaniu tego transferu:

$$u_1(\frac{1}{2} - \tau, \frac{1}{2} - 2\tau, \frac{1}{4}) = -\frac{3}{4} + 3\tau > -\frac{3}{4}.$$

Przyglądając się uważnie reakcjom graczy na zwiększanie τ możemy dokładniej przeanalizować, w jaki sposób działanie wszystkich bodźców, zwłaszcza na obywatela 1, prowadzi do pozornie paradoksalnych skutków. Otóż wspomniany podatek podwójnie obniża motywację gracza 1 do pracy – po pierwsze, umożliwiając mu utrzymanie zadowalającego poziomu konsumpcji, a po drugie, dopuszczalnego poziomu względnego niedostatku, przy mniejszym wysiłku. W efekcie, spadek bodźców do pracy zarobkowej przeważa nad wzrostem konsumpcji wynikającym z transferu dóbr od gracza 2. Warto zwrócić uwagę, że taki rezultat nie byłby możliwy do wymodelowania bez uwzględniania względnego niedostatku w funkcjach użyteczności. Jednakże, z założenia względny niedostatek wyraża niechęć do zwiększania nierówności, więc działanie tego bodźca wydaje się sprzyjać zupełnie innym rozwiązaniom modelu, niż otrzymujemy z obliczeń.

Może się wydawać, że ten paradoks jest spowodowany specyficzną konstrukcją pary funkcji użyteczności. Jednakże, autorzy pracy [6] dowodzą, że wszystkie przedstawione fenomeny utrzymują się na pewnym zbiorze otwartym w przestrzeni „rozsądnych” funkcji użyteczności, a zatem nie mamy do czynienia ze zjawiskiem osobliwym i musimy się liczyć z faktem, że takie sytuacje mogą zachodzić w świecie rzeczywistym.

Z powyższego modelu można wyciągnąć kilka różnych wniosków i tylko uważne przyjrzenie się zachodzącym w rzeczywistości procesom może rozstrzygnąć o ich prawdziwości:

I. Oparty na dochodach współczynnik Giniego może nie być najlepszym miernikiem nierówności.
II. Społeczni planiści, którzy chcą wpłynąć swoją polityką na mierniki nierówności, muszą uważać na paradoksalne efekty swoich działań. W szczególności, bezpośrednie opodatkowanie na cele wsparcia biedniejszych obywateli może przynieść skutki odwrotne do zakładanych.

III. Spadek bezwzględnego dochodu i wzrost poziomu nierówności wcale nie musi prowadzić do wzrostu niezadowolenia społecznego.

4. Względny niedostatek i asymilacja imigrantów

Innym palącym zagadnieniem współczesnych nauk społecznych jest asymilacja imigrantów w ich nowym kraju zamieszkania. Mimo wielokrotnie empirycznie dowiedzionych korzyści z dostosowania swojego stylu życia do społeczeństwa, w którym żyją, imigranci często wybierają izolację, co może skutkować nieporozumieniami i konfliktami pomiędzy różnymi grupami etnicznymi. Z drugiej strony, zdarzają się sytuacje asymilacji grupy imigrantów, dla której potencjalne korzyści finansowe są znacznie mniejsze niż dla grup, które zdecydowały się na izolację. Sam czynnik zysku finansowego wydaje się niewystarczający do opisu rzeczywistości.

Również w tym przypadku wyjaśnieniem sytuacji może być odwołanie do poczucia względnego niedostatku. Intuicyjnie, może być ono źródłem różnych, przeciwstawnie działających bodźców. Oczywiście, jeśli „tubylcy" zarabiają znacznie lepiej od imigrantów, ochrona przed odczuwaniem względnego niedostatku może być motywem braku asymilacji, w wyniku której dany imigrant poznawałby coraz więcej osób bogatszych od niego. Z drugiej strony, imigrant może chcieć to uczucie zredukować poprzez zwiększenie swoich zarobków, co asymilacja może ułatwić. Taka sytuacja występuje szczególnie wtedy, gdy asymilują się, zwiększając swoje zarobki, znajomi danego imigranta: wtedy także bez asymilacji taka osoba zaczyna odczuwać względny niedostatek.

Rozważmy zatem grupę imigrantów zarobkowych w pewnym kraju, którego obywatele zarabiają więcej od nich. Grupa ta jest praktycznie homogeniczna – poszczególni imigranci różnią się tylko współczynnikami asymilacji $\omega \in [0, 1]$, definiowanymi jako stosunek liczby imigrantów w grupie referencyjnej danej osoby do rozmiaru tej grupy. Ten współczynnik będzie miarą asymilacji danego imigranta: jeśli jest bliski 0 – imigrant praktycznie się nie integruje, utrzymując kontakty tylko z grupą znajomych sobie imigrantów, zaś jeśli jest duży, bliski 1 – imigrant praktycznie jest zasymilowany, gdyż zawiera znajomości w większości z tubylcami. Zakładamy, że każdy imigrant może „sterować" tym współczynnikiem, starając się poznać coraz większą liczbę mieszkańców kraju docelowego lub też przeciwnie – odcinając się od tych kontaktów.

Naturalnie, asymilacja wymaga wysiłku (nauka języka, nawiązywanie znajomości, wykraczanie poza własną „strefę komfortu"), ale, zgodnie z danymi empirycznymi, przynosi korzyści (lepsza znajomość rynku pracy, umiejętność komunikacji z tubylcami itp.). Dlatego zakładamy, że Y – zysk z asymilacji i C – koszt asymilacji są rosnącymi funkcjami ω. Dodatkowo $Y(0) = C(0) = 0$, a nadwyżka średniego dochodu tubylców nad podstawowym dochodem imigrantów $Y(0)$ wynosi Z i jest większa od $Y(1)$ (innymi słowy, rdzenni mieszkańcy zawsze będą zarabiać więcej niż nawet zasymilowani imigranci – przynajmniej w krótkim okresie).

By nie komplikować modelu nadmiernie, zakładamy, że każdy imigrant ma do wyboru 3 strategie: brak asymilacji (s_0), częściową asymilację (s_1) i pełną asymilację (s_2). Przez pełną asymilację rozumiem osiągnięcie maksymalnego możliwego poziomu ω, zaś częściowa asymilacja jest wypadkową wszystkich przyjmowanych strategii pośrednich (ze względu na późniejsze uśrednianie wszelkich wielkości w konstrukcji dynamiki modelu, ograniczenie do 3 strategii nie wpływa znacząco na rozwiązanie). Każdej strategii s_i przypisuję oczekiwany przez wybierających ją poziom asymilacji, dochód i koszt: ω_i, Y_i, C_i. Naturalnie $\omega_0 = C_0 = Y_0 = 0$. x_i oznacza stosunek liczby imigrantów wybierających strategię s_i do całkowitej liczby migrantów (oczywiście $x_0 + x_1 + x_2 = 1$). Wektor $x = (x_1, x_2, x_3)$ nazywamy profilem populacji imigrantów.

Do badania procesów asymilacyjnych w tym środowisku zastosujemy narzędzie ewolucyjnej teorii gier: *dynamikę replikacyjną*. Działa ona następująco: gracz opiera swoje decyzje na ciągłej obserwacji strategii i wypłat losowo wybranych innych graczy. Bodźcem do zmiany strategii jest obserwacja wyników graczy używających strategii, dających lepsze wypłaty (czyli wyższe poziomy funkcji użyteczności). Gracz ma tym silniejszy bodziec do zmiany swojej strategii, im gorsza jest jego strategia w porównaniu z innymi. Zmiany strategii w populacji graczy generują układ dynamiczny na przestrzeni możliwych profili populacji opisany przez układ równań różniczkowych postaci:

$$x_i' = x_i(u(s_i, x) - \tilde{u}(x)),$$

gdzie $u(s_i, x)$ jest użytecznością uzyskiwaną dzięki strategii s_i, a $\tilde{u}(x)$ jest średnią użytecznością populacji imigrantów dla profilu populacji x. Badanie dynamiki tego układu prowadzi do rozwiązania gry, gdyż jej równowagi Nasha muszą tworzyć stabilne punkty stałe układu, zaś jeśli te punkty stałe są asymptotycznie stabilne, stają się równowagami Nasha.

Narzędzie to pasuje idealnie do opisywanej przez nas sytuacji: imigranci (jak za chwilę zobaczymy) nie są w stanie przewidzieć, jakie będą korzyści i koszty stosowania każdej ze strategii w długim okresie czasu, gdyż zależą one od działań pozostałych członków grupy. Dlatego muszą się oprzeć na obserwacji stanu obecnego i na bieżąco korygować swoją strategię, naśladując odnoszących sukces sąsiadów.

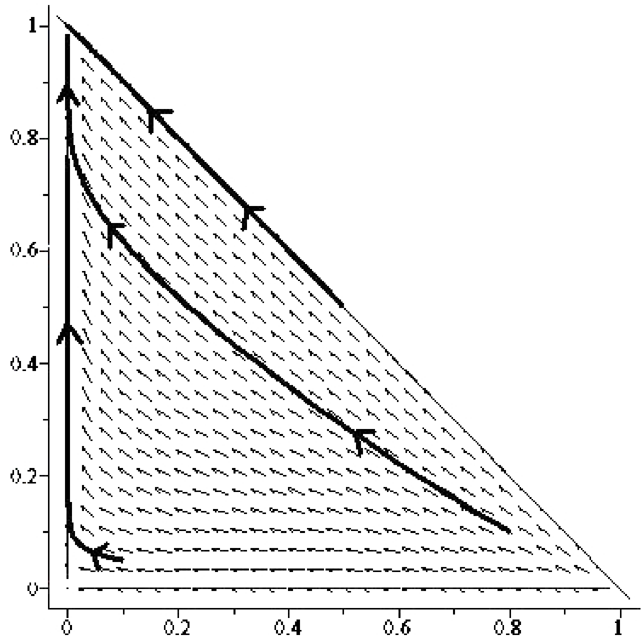
Przed badaniem samej dynamiki, na chwilę skupmy się na przestrzeni fazowej: co prawda formalnie jest ona zbiorem wektorów trójwymiarowych, ale ze względu na zależność $x_1 = 1 - x_0 - x_2$, możemy wyeliminować zmienną x_1 i badać dynamikę tylko na trójkącie prostokątnym: $S = \{(x_0, x_2) : x_0 \geq 0, x_2 \geq 0, x_0 + x_2 \leq 1\}$. Jego wierzchołki reprezentują sytuacje, gdy cała populacja wybiera tę samą strategię: wierzchołek $(1, 0)$ – strategię s_0, wierzchołek $(0, 0)$ – strategię s_1 i wierzchołek $(0, 1)$ – strategię s_2. Pozostałe punkty trójkąta opisują profile populacji imigrantów, w których dzielą się oni na podgrupy stosujące różne strategie – im bliżej danego wierzchołka leży odpowiedni punkt, tym większy odsetek imigrantów stosuje strategię reprezentowaną przez dany wierzchołek.

Potrzebujemy jeszcze sformułowania funkcji użyteczności stosowania każdej ze strategii. Jeśli nie uwzględniamy wpływu względnego niedostatku i używamy funkcji wypłaty typu „dochód minus koszt” ($u = Y - C$), to układ równań różniczkowych, generujący dynamikę systemu będzie miał postać:

$$\begin{cases} x_0' = x_0((x_0 + x_2 - 1)(Y_1 - C_1 - x_2(Y_2 - C_2)), \\ x_2' = x_2(x_0(Y_1 - C_1) + (1 - x_2)(Y_2 - C_2 - (Y_1 - C_1). \end{cases}$$

Jak łatwo przewidzieć, ten układ dopuszcza zawsze tylko jedną równowagę Nasha – w jednym z wierzchołków sympleksu. O tym, który to wierzchołek, przesądza wskazanie największej z wielkości wypłat: $Y_2 - C_2$ (dla pełnej asymilacji), $Y_1 - C_1$ (dla asymilacji częściowej), 0 (dla braku asymilacji). Przykładową dynamikę takiego układu przedstawia rysunek 1.

Wiemy jednak, że oparcie się jedynie na czystej rachubie kosztów i zysków prowadzi do modeli, które nie mają odbicia w rzeczywistości. Migranci w swoich wyborach strategii asymilacyjnych kierują się czymś jeszcze. Czy tym dodatkowym bodźcem mógłby być względny niedostatek? Niewątpliwie porównywanie swoich dochodów z tubylcami, z którymi imigrant zaznajamia się w procesie asymilacji, może do tego procesu zniechęcać. Z drugiej strony, imigrant unikający asymilacji i związanych z nią zysków, może odczuwać dyskomfort wynikający z porównania z innymi imigrantami, którzy dzięki asymilacji osiągają większą użyteczność. To może zachęcać do



RYSUNEK 1. Przykład dynamiki układu bez uwzględniania względnego niedostatku dla parametrów: $Z = 100, Y_2 = 30, C_2 = 20, \omega_2 = \frac{99}{100}, Y_1 = 15, C_1 = 7, \omega_1 = \frac{1}{2}$. Jako, że $Y_2 - C_2 > Y_1 - C_1 > 0$, jedynym punktem asymptotycznie stabilnym układu jest $(0, 1)$, a więc jedyną równowagą Nasha jest pełna asymilacja wszystkich imigrantów.

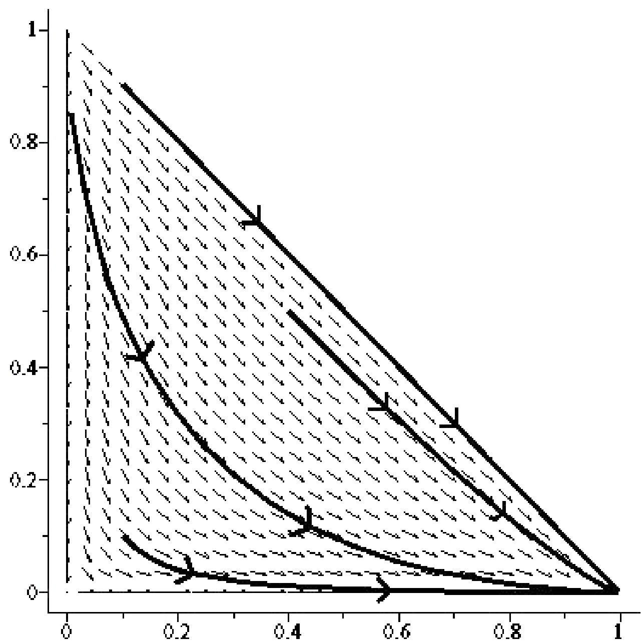
integracji z tubylcami. Bez sformułowania konkretnych równań, trudno oszacować, który czynnik przeważy. Na potrzeby modelu, użyjemy najprostszych możliwych funkcji użyteczności typu: „dochód minus koszt minus względny niedostatek”:

$$\begin{aligned}
u(s_0, x_0, x_2) &= -x_1 Y_1 - x_2 Y_2 = (x_0 + x_2 - 1)Y_1 - x_2 Y_2,\\
u(s_1, x_0, x_2) &= Y_1 - C_1 - \omega_1(Z - Y_1) - x_2(1 - \omega_1)(Y_2 - Y_1),\\
u(s_2, x_0, x_2) &= Y_2 - C_2 - \omega_2(Z - Y_2).
\end{aligned}$$

Te funkcje użyteczności generują następujący układ równań różniczkowych na przestrzeni fazowej S:

$$\begin{cases}
x_0' = x_0(-Y_1 x_0^2 - (1 - \omega_1)x_2^2 + \omega_1(Y_2 - Y_1)x_0 x_2\\
\qquad + ((3 + \omega_1)Y_1 - C_1 - \omega_1 Z)x_0 + ((1 + \omega_1)(Y_1 - Y_2) + C_2 - C_1\\
\qquad + \omega_2(Z - Y_2) - \omega_1(Z - Y_1))x_2 + C_1 + \omega_1(Z - Y_1) - 2Y_1)\\
x_2' = x_2(-Y_1 x_0^2 - (1 - \omega_1)x_2^2 + \omega_1(Y_2 - Y_1)x_0 x_2\\
\qquad + ((2 - \omega_1)Y_1 - C_1 - \omega_1 Z)x_0 + (\omega_1(Y_1 - Y_2) + C_2 - C_1\\
\qquad + \omega_2(Z - Y_2) - \omega_1(Z - Y_1))x_2 + C_1 - C_2 + \omega_1(Z - Y_1)\\
\qquad - \omega_2(Z - Y_2) + Y_2 - Y_1).
\end{cases}$$

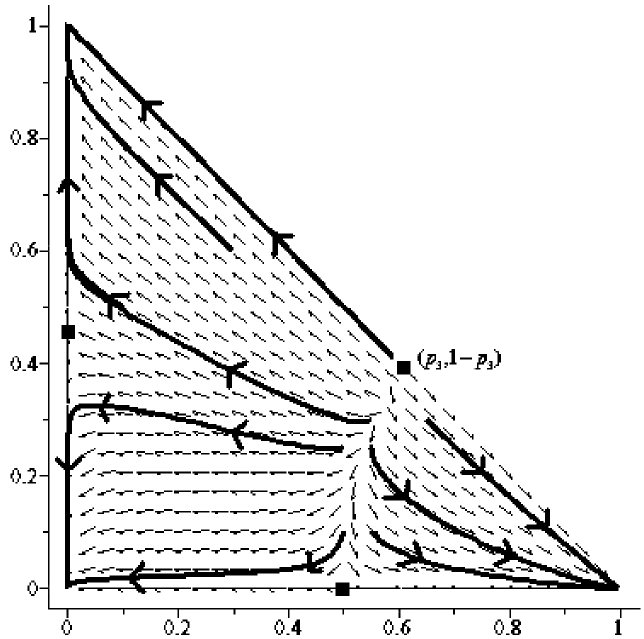
Jak widać, otrzymujemy dość skomplikowany układ równań nieliniowych, nienadający się do rozwiązywania analitycznego. Zanim przejdziemy do analizy jego dynamiki, zauważmy, że daje on znacząco inne rezultaty od przewidywanych przez model standardowy typu „dochód minus koszt”, co można zobaczyć na rysunku 2, ilustrującym dynamikę przy tych samych parametrach co rysunek 1.



RYSUNEK 2. Przykład dynamiki układu z uwzględnieniem względnego niedostatku dla parametrów: $Z = 100, Y_2 = 30, C_2 = 20, \omega_2 = \frac{99}{100}, Y_1 = 15, C_1 = 7, \omega_1 = \frac{1}{2}$. Mimo, że $Y_2 - C_2 > Y_1 - C_1 > 0$, jedynym punktem asymptotycznie stabilnym układu jest $(1, 0)$, a więc jedyną równowagą Nasha jest brak asymilacji wszystkich imigrantów.

Przykład z rysunku 1 pokazuje, że faktycznie względny niedostatek może być wyjaśnieniem wcześniej wspomnianego fenomenu – uchylania się imigrantów od finansowo opłacalnej asymilacji. Jakie mogą być inne rozwiązania tego modelu? Z pracy [7] wynika, że chociaż nasz układ równań może posiadać nawet 7 punktów stałych, tylko 3 punkty, będące wierzchołkami trójkąta mogą być asymptotycznie stabilne. W istocie, w zależności od doboru parametrów ω, Z, Y i C, mogą zachodzić wszystkie (poza samymi rozwiązaniami niestabilnymi) kombinacje stabilności i niestabilności tych rozwiązań: dla pewnych parametrów wszystkie trzy wierzchołki są stabilne, dla innych stabilna jest dowolna para wierzchołków przy trzecim niestabilnym, aż wreszcie istnieje możliwość istnienia dokładnie jednego wierzchołka stabilnego. Co więcej, każdy z możliwych układów rozwiązań stabilnych i niestabilnych w narożnikach zachodzi dla otwartego, niepustego podzbioru przestrzeni parametrów.

Rozwiązanie dynamiki replikacyjnej „pełnego” układu pokazują, że już układ oparty na najprostszych możliwych funkcjach użyteczności wykorzystujących względny niedostatek potrafi wychwycić istotne aspekty rzeczywistości. Poza pokazaną już racjonalizacją rezygnacji z finansowo korzystnej asymilacji, układ może wyjaśnić różnorodne zachowania grup imigrantów w podobnych warunkach oraz podobne zachowania imigrantów w ramach jednej, izolowanej grupy. Skonstruowana tutaj dynamika przewiduje, że ostatecznie cała badana grupa wybierze tę samą



RYSUNEK 3. Przykład dynamiki układu z uwzględnieniem względnego niedostatku dla parametrów: $Z = 100, Y_2 = 50, C_2 = 30, \omega_2 = \frac{99}{100}, Y_1 = 20, C_1 = 10, \omega_1 = \frac{1}{2}$. Wszystkie trzy wierzchołki są asymptotycznie stabilnymi punktami stałymi układu, więc istnieją trzy możliwe równowagi Nasha dla całej gry. Ostateczne rozwiązanie zależy od stanu początkowego układu, czyli od wyjściowego nastawienia imigrantów do kwestii asymilacji.

strategię (nawet jeśli na początku nie wiadomo, jaką). Taka, często obserwowana, zbieżność zachowań asymilacyjnych wewnątrz grupy znajomych imigrantów dotychczas najczęściej była wyjaśniana faktem, że w naturalny sposób ludzie tworzą więzi z osobami o podobnych przekonaniach i sposobach działania. Nasz model pokazuje, że założenie o pierwotnej jednolitości przekonań grupy nie jest konieczne do uzyskania jednolitego efektu końcowego. Z drugiej strony, model układu z dwoma lub trzema równowagami Nasha przewiduje, że dwie różne, odizolowane od siebie grupy imigrantów, w mniej więcej tych samych warunkach społeczno-ekonomicznych mogą przyjąć zupełnie różne strategie asymilacyjne, a zależy to jedynie od ich początkowego nastawienia do asymilacji.

Dodatkowo, dynamika układów z kilkoma równowagami Nasha, sugeruje możliwość użycia nowej (być może bardziej efektywnej z punktu widzenia kosztów) polityki, zachęcającej imigrantów do asymilacji. Nie jest konieczne ciągłe stwarzanie bodźców zachęcających do asymilacji wszystkich imigrantów, a wystarczą pojedyncze „impulsy” zachęt (np. popularyzacja historii o sukcesach imigrantów), które pozwolą warunkom początkowym naszego modelu przeskoczyć do basenu przyciągania bardziej korzystnej równowagi Nasha, a następnie przeciwdziałanie wszelkim impulsom, które mogłyby spowodować „wyjście” z tego basenu. Innymi słowy, wystarczy zapewnić, że wystarczająco duża część imigrantów zacznie się asymilować. Pozostali, motywowani względnym niedostatkiem, będą musieli pójść w ich ślady. W ten sam sposób skuteczne może też być ostrożne

„mieszanie” grup imigrantów o różnym nastawieniu do asymilacji celem podniesienia poziomu relatywnego niedostatku wśród jej przeciwników.

5. PODSUMOWANIE

Badania nad względnym niedostatkiem, a w szczególności jego matematyczne modelowanie, właściwie dopiero się rozpoczynają. Jednakże, dotychczasowe osiągnięcia wydają się dość znaczące. W końcu, trudno w pełni zrozumieć świat i ludzi, ignorując istnienie tak potężnego bodźca, jakim jest zawiść.

LITERATURA

[1] A.E. Clark, C. Senik, *Who compares to whom? The anatomy of income comparisons in Europe*, Economic Journal 120: 573–594, 2010.

[2] J.S. Duesenberry, *Income, Saving and the Theory of Consumer Behavior*, Harvard University Press, Cambridge, MA 1949.

[3] W. Güth, R. Schmittberger, B. Schwarze, *An experimental analysis of ultimatum bargaining*, Journal of Economic Behavior and Organization 3(4): 367–388, 1982.

[4] E.F.P. Luttmer, *Neighbors as negatives: relative earnings and well-being*, Quarterly Journal of Economics 120: 963–1002, 2005.

[5] H. Schoeck, *The Envy: a theory of social behavior*, Harcourt, Brace & World 38, New York, RI 1969 (polskie wydanie: *Zawiść: źródło agresji, destrukcji i biedy*, Fijorr Publishing Company, 2012).

[6] O. Stark, M. Jakubek, G. Kosiorowski, *An adverse social welfare effect of a Pigou-Dalton transfer* , w recenzji.

[7] O. Stark, G. Kosiorowski, *Relative deprivation and the evolutionary dynamics of assimilation*, w recenzji.

[8] H. Takahashi, M. Kato, M. Matsuura, D. Mobbs, T. Suhara, Y. Okubo, *When your gain is my pain and your pain is my gain: neural correlates of envy and schadenfreude*, Science 323: 937–939, 2009.

GRZEGORZ KOSIOROWSKI
WYDZIAŁ FINANSÓW, UNIWERSYTET EKONOMICZNY W KRAKOWIE, UL. RAKOWICKA 27, 31-510 KRAKÓW
Adres e-mail: grzegorz.kosiorowski@uek.krakow.pl