ISBN 978-83-942807-1-0
PORTAL CZM 2015

APROKSYMACJA PRZY POMOCY OPERATORÓW BERNSTEINA

BARBARA WOLNIK I JACEK GULGOWSKI

STRESZCZENIE. W niniejszym artykule przedstawiamy wybrane własności aproksymacyjne wielomianów Bernsteina funkcji ciągłej $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ w różnych przestrzeniach funkcyjnych. Podajemy również przykłady zastosowań tych aproksymacji do rozwiązywania zagadnień dla równań różniczkowych zwyczajnych.

1. WIELOMIANY BERNSTEINA I ICH PODSTAWOWE WŁASNOŚCI

Wielomiany Bernsteina występują w klasycznym dowodzie twierdzenia o gęstości zbioru wielomianów w przestrzeni funkcji ciągłych $C[0,1]$ z normą supremum. Okazuje się bowiem, że dzięki nim otrzymujemy prosty przepis na zbudowanie ciągu wielomianów jednostajnie zbieżnego do zadanej z góry funkcji ciągłej $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, co daje konstrukcyjny dowód twierdzenia Weierstrassa z 1885 roku. Jest to o tyle ważne, że na przykład wielomiany interpolacyjne o ustalonych węzłach interpolacji nie mają tej własności.

Definicja 1.1. Niech $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}_+$. Wtedy n-tym wielomianem Bernsteina funkcji u nazywamy wielomian $B_n(u)\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dany wzorem

$$(B_n u)(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u\left(\frac{k}{n}\right) t^k (1-t)^{n-k}.$$

Zasadnicze twierdzenie przesądzające o wadze tej definicji podane zostało w 1912 roku przez Siergieja Bernsteina (por. [1]) i brzmi tak:

Twierdzenie 1.2. *Dla każdej funkcji ciągłej $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ odpowiadający jej ciąg wielomianów Bernsteina $B_n(u)$ zbiega jednostajnie do funkcji u.*

Do dowodu twierdzenia odesłać możemy np. do poświęconej wielomianom Bernsteina monografii [15], w języku polskim możemy polecić pozycję [17].

W dalszym ciągu przestrzeń Banacha funkcji ciągłych z normą supremum oznaczać będziemy symbolem $C[0,1]$, zaś normę w tej przestrzeni jako $\|\cdot\|_\infty$. W tym ujęciu twierdzenie Bernsteina zamyka się w zapisie:

$$\forall\, u \in C([0,1]) \quad \lim_{n\to+\infty} \|B_n(u) - u\|_\infty = 0.$$

Pracę wykonano w ramach projektu Centrum Zastosowań Matematyki, współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zauważmy, że definicja wielomianów Bernsteina zadaje nam odwzorowania liniowe $B_n\colon C[0,1] \to C[0,1]$. Naturalne pytanie o ciągłość tych operatorów uzyskuje natychmiastową odpowiedź.

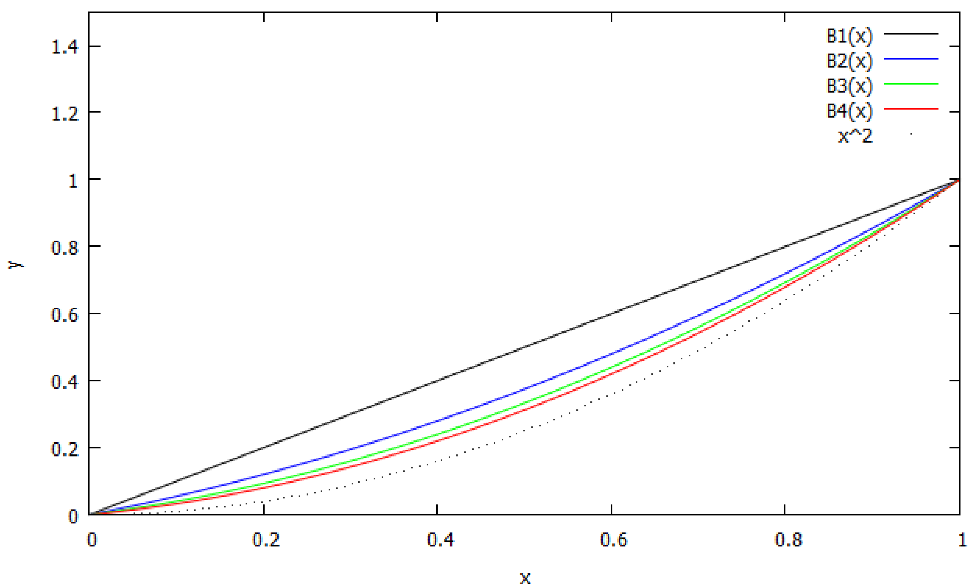
Lemat 1.3. *Dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ operator liniowy $B_n\colon C[0,1] \to C[0,1]$ jest ciągły, a jego norma wynosi 1.*

Dowód. W pierwszej kolejności zauważmy, że

$$|B_n(u)| \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |u(\frac{k}{n})| t^k (1-t)^{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \|u\|_\infty t^k (1-t)^{n-k} = \|u\|_\infty.$$

Dodatkowo, dla funkcji $u(t) = 1$ mamy $B_n(u) = u$. □

Okazuje się, że to ostatnie spostrzeżenie można wzmocnić, gdyż każdy operator B_n odtwarza funkcje liniowe, tj. jeśli $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem $u(t) = at + b$, to $B_n(u) = u$. Niestety, operatory B_n nie odtwarzają wielomianów stopnia większego niż 1. Możemy to zaobserwować na rysunku 1.



RYSUNEK 1. Funkcja $u(t) = t^2$ (linia przerywana) oraz cztery początkowe wielomiany Bernsteina tej funkcji (linie ciągłe) – począwszy od funkcji największej $B_1(u)$, $B_2(u)$, $B_3(u)$, $B_4(u)$

Widzimy, że dla funkcji $u(t) = t^2$ mamy

$$B_n(u)(t) = t^2 + \frac{t(1-t)}{n},$$

co pokazuje, że w przypadku tej funkcji ciąg wielomianów $B_n(u)$ zbiega do u dość wolno – jak $\frac{1}{n}$. Voronowskaja w 1932 roku udowodniła, że takie samo tempo zbieżności obserwujemy w przypadku każdej funkcji u, która jest dwukrotnie różniczkowalna (por. [15]).

Twierdzenie 1.4. *Niech $u \in C[0,1]$. Wówczas*

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(B_n(u)(t) - u(t)\right) = \frac{t(1-t)}{2}u''(t)$$

dla wszystkich $t \in [0,1]$, w których funkcja u jest dwukrotnie różniczkowalna.

Tempo zbieżności wielomianów Bernsteina daje się oszacować nieco ogólniej – bez wymagania dwukrotnej różniczkowalności funkcji u. Dwa poniższe twierdzenia podane są za monografią [15].

Twierdzenie 1.5. *Niech $u \in C[0,1]$. Wówczas dla każdego $n > 1$*

$$\|B_n(u) - u\|_\infty \leq \frac{5}{4}\omega_u(\frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Twierdzenie 1.6. *Jeśli $u \in C[0,1]$ posiada ciągłą pochodną, to dla każdego $n > 1$*

$$\|B_n(u) - u\|_\infty \leq \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{n}}\omega_{u'}(\frac{1}{\sqrt{n}}).$$

W powyższych twierdzeniach funkcja $\omega_v\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ oznacza tzw. moduł ciągłości funkcji v, tzn.

$$\omega_v(\delta) = \sup\{|v(t) - v(s)|\colon t,s \in [0,1] \text{ oraz } |t-s| \leq \delta\}. \tag{1.1}$$

Jak widać tempo zbieżności nie jest oszałamiające – co więcej można pokazać, że istnieją funkcje ciągłe, dla których tego tempa nie można poprawić.

Ciekawe zachowanie wielomianów Bernsteina możemy zaobserwować kiedy popatrzymy na nie z punktu widzenia wariacji (wahania) funkcji f (o wahaniu funkcji poczytać można w książce [17]).

Twierdzenie 1.7. *Dla funkcji ciągłej $u\colon [0,1] \to +\infty$ o ograniczonej wariacji $\bigvee_0^1 u$ mamy*

$$\bigvee_0^1 B_n(u) \leq \bigvee_0^1 u.$$

Co więcej, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja u jest monotoniczna.

Przyjrzyjmy się teraz kilku ważnym zaletom operatorów Bernsteina B_n dotyczącym zachowywania pewnych szczególnych własności funkcji u.

Twierdzenie 1.8. *Operatory Bernsteina B_n są monotoniczne, tzn. jeśli $u_1(t) \leq u_2(t)$ na $[0,1]$, to dla każdego $t \in [0,1]$ zachodzi $B_n(u_1)(t) \leq B_n(u_2)(t)$.*

Fakt ten jest równoważny stwierdzeniu, że wielomian Bernsteina funkcji nieujemnej jest funkcją nieujemną. Prosty dowód tego twierdzenia, jak i kolejnego, znaleźć można w [21].

Twierdzenie 1.9. *Jeśli $u \in C([0,1])$ jest funkcją rosnącą, to również funkcja $B_n(u)$ jest rosnąca na $[0,1]$. Jeśli zaś funkcja $u \in C([0,1])$ jest wypukła, to funkcja $B_n(u)$ także jest wypukła.*

2. Operatory Bernsteina w innych przestrzeniach Banacha

Dobre własności operatorów B_n, takie jak zachowywanie dodatniości, monotoniczności czy wypukłości funkcji, są konsekwencją następującego faktu dotyczącego $C^r([0,1])$, przestrzeni funkcji o ciągłej pochodnej rzędu r.

Twierdzenie 2.1. *Jeżeli* $u \in C^r([0,1])$ *dla pewnego* $r \in \mathbb{N}_0$ *oraz*

$$\forall t \in [0,1] \;\; m \leq u^{(r)}(t) \leq M,$$

to dla $n \geq r$ *zachodzi*

$$\forall t \in [0,1] \;\; c_r m \leq B_n^{(r)}(u)(t) \leq c_r M,$$

gdzie $c_0 = c_1 = 1$ *oraz dla* $2 \leq r \leq n$ *definiujemy* $c_r = c_{r-1}\left(1 - \frac{r-1}{n}\right)$.

Wynik ten można znaleźć np. w [21], tam też można prześledzić dowód następującego faktu, pokazującego siłę wielomianów Bernsteina.

Twierdzenie 2.2. *Jeżeli* $u \in C^r([0,1])$ *dla pewnego* $r \in \mathbb{N}_0$*, to ciąg wielomianów* $B_n^{(r)}(u)$ *zbiega jednostajnie do* $u^{(r)}$ *na* $[0,1]$.

Zanim przejdziemy do pytań o ciągłość operatorów Bernsteina w przestrzeniach $C^r([0,1])$, wprowadźmy pojęcie funkcji hölderowskiej.

Definicja 2.3. Mówimy, że funkcja $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha \in (0,1]$ oraz stałą $L > 0$, jeśli

$$\forall t, s \in [0,1] \; |u(t) - u(s)| \leq |t-s|^{\alpha}.$$

W 1938 roku Kac ([11], [12]) pokazał następujące tempo zbieżności dla funkcji hölderowskich (inny dowód można znaleźć w pracy Mathé [19]):

Twierdzenie 2.4. *Załóżmy, że* $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *spełnia warunek Höldera z wykładnikiem* $\alpha \in (0,1]$ *oraz stałą* $L > 0$*. Wówczas*

$$\forall t \in [0,1] \;\; |B_n(u)(t) - u(t)| \leq L\left(\frac{t(1-t)}{n}\right)^{\alpha/2} \leq L\left(\frac{1}{4n}\right)^{\alpha/2}.$$

W pracach [16] oraz [3] autorzy pokazali następujący wynik

Twierdzenie 2.5. *Jeśli* $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *spełnia warunek Höldera z wykładnikiem* $\alpha \in (0,1]$ *i stałą* $L > 0$*, to jej wielomian Bernsteina* $B_n(u)$ *również spełnia warunek Höldera z tym samym wykładnikiem* α *i tą samą stałą* L.

Dla $\alpha = 1$ rezultat ten został opublikowany wcześniej w pracy [9].

Zauważmy, że zbiór

$$Lip_{\alpha}([0,1]) = \{u\colon [0,1] \to \mathbb{R} \colon \exists L{>}0 \; \forall t, s \in [0,1] \; |u(t) - u(s)| \leq |t-s|^{\alpha}\}$$

jest przestrzenią Banacha z normą

$$\|u\|_{\alpha} = \|u\|_{\infty} + \sup_{s,t \in [0,1], s \neq t} \frac{|u(s) - u(t)|}{|s-t|^{\alpha}} =$$
$$= \|u\|_{\infty} + \sup_{0<h<1} \max_{t \in [0,1-h]} \frac{|u(t+h) - u(t)|}{h^{\alpha}} =: \|u\|_{\infty} + |u|_{\alpha}.$$

Jako wniosek z Twierdzenia 2.5 otrzymujemy zatem, że operator B_n przekształca $Lip_{\alpha}([0,1])$ w siebie. Można więc pytać o ograniczoność operatorów Bernsteina w przestrzeniach $Lip_{\alpha}([0,1])$ dla $\alpha \in (0,1]$. Autorzy pracy [6] uzyskali pozytywną odpowiedź w stosunku do bardziej ogólnego zagadnienia, uwzględniającego również przestrzenie $C^r([0,1])$.

Dla $r \in \mathbb{N}_0$ oraz $0 \leq \alpha \leq 1$ zdefiniujmy następującą przestrzeń Banacha

$$C^{r,\alpha}([0,1]) = \left\{ u \in C^r([0,1]) \colon \|u\|_{r,\alpha} := \sum_{k=0}^{r} \|u^{(k)}\|_\infty + |u^{(r)}|_\alpha < \infty \right\}.$$

Twierdzenie 2.6. *Niech $u \in C^{r,\alpha}([0,1])$, gdzie $r \in \mathbb{N}_0$ oraz $0 \leq \alpha \leq 1$. Wtedy*

$$\|B_n(u) - u\|_{r,\alpha} \leq C_r \|u\|_{r,\alpha},$$

gdzie stała C_r zależy jedynie od r.

W ramach uzupełnienia powyższych informacji warto zwrócić uwagę na to, że analogiczne pytania tego typu można zadawać również dla funkcji u niekoniecznie spełniających warunek Höldera, posiadających jednak ustalony moduł ciągłości ω – i te pytania również znajdują interesującą odpowiedź (por. [13]):

Twierdzenie 2.7. *Jeżeli funkcja $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, zaś ω_u jest jej modułem ciągłości danym wzorem* (1.1)*, to*

$$\omega_{B_n(u)}(s) \leq 4\omega_u(s), \quad \textit{dla } s \geq 0.$$

Podobne pytania możemy zadać dla przestrzeni funkcji o ograniczonym wahaniu, a ściślej dla jej domkniętej podprzestrzeni złożonej z funkcji ciągłych. Niech

$$CBV[0,1] = \{u \in C[0,1] \colon \bigvee_0^1 u < +\infty\}$$

z normą

$$\|u\|_{BV} = |u(0)| + \bigvee_0^1 u.$$

Prostym spostrzeżeniem jest następujący lemat

Lemat 2.8. *Operator $B_n \colon CBV[0,1] \to CBV[0,1]$ jest ciągły i jego norma wynosi* 1.

Dowód. Ze względu na wspomnianą w Twierdzeniu 1.7 własność mamy

$$\|B_n u\|_{BV} = |B_n(u)(0)| + \bigvee_0^1 B_n(u) \leq |u(0)| + \bigvee_0^1 u = \|u\|_{BV}.$$

Z kolei dla funkcji stale równej 1 zachodzi równość

$$\|B_n(1)\|_{BV} = \|1\|_{BV},$$

co ostatecznie dowodzi, że $\|B_n\| = 1$. □

Tym razem jednak sytuacja jest nieco inna niż w poprzednio rozpatrywanych przestrzeniach. Jeżeli zapytamy, czy $\bigvee_0^1 (B_n(u) - u) \to 0$, to niestety odpowiedź jest (ogólnie) negatywna. Mówi o tym następujące twierdzenie podane w [5]:

Twierdzenie 2.9. *Funkcja $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jest absolutnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy* $\bigvee_0^1 (B_n(u) - u) \to 0$.

3. Aproksymacja zagadnień dla równań różniczkowych zwyczajnych

W pracy [18] podano metodę aproksymacji rozwiązań liniowego zagadnienia początkowego dla liniowego równania różniczkowego zwyczajnego

$$\begin{cases} x'(t) = m(t)x(t) + n(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

opartą o twierdzenie pochodzące od Chaplygina

Twierdzenie 3.1. *Niech $U(t,x)$, $V(t,x)$ są funkcjami spełniającymi warunek Lipschitza oraz*

$$U(t,x) \le f(t,x) \le V(t,x),$$

wówczas rozwiązania $u(t)$ oraz $v(t)$ zagadnień

$$\begin{cases} x'(t) = U(t,x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} x'(t) = V(t,x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

spełniają $u(t) \le x(t) \le v(t)$, gdzie $x(t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

W metodzie tej konstruowane są kolejne przybliżenia $u_n(t)$, $v_n(t)$ – oparte właśnie na wielomianach Bernsteina odpowiednich funkcji.

Z kolei w pracy [2] zaproponowano by podczas rozwiązywania zagadnienia brzegowego Dirchleta dla równań różniczkowych liniowych drugiego rzędu poszukiwać aproksymacji rozwiązania postaci

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} C_k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k},$$

gdzie współczynniki C_k mogłyby być poszukiwane przy pomocy metody Galerkina. Podane w pracy przykłady pokazują, że wykorzystanie wielomianów Bernsteina stopnia 45 daje dokładność aproksymacji rzędu tej jaką mają liczby zmiennoprzecinkowe podwójnej precyzji (czyli 10^{-15}). Widzimy więc, że – z jednej strony, do uzyskania odpowiedniej dokładności, musimy brać wielomiany odpowiednio wysokiego stopnia – z drugiej, jednak, strony wymiar przestrzeni, w której poszukujemy rozwiązań aproksymujących nie jest zbyt wielki. W pracy [2] wymiar przestrzeni, w której ulokowane są rozwiązania zlokalizowany jest – w pewnym sensie – eksperymentalnie, warto jednak zwrócić uwagę na to, że wymiar ten można oszacować w oparciu o twierdzenia pokazujące tempo zbieżności.

Podobne podejście można również zastosować do rozwiązywania dużo bardziej złożonych, nieliniowych zagadnień brzegowych (np. Dirichleta) dla równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu.

Rozważmy zagadnienie brzegowe

$$\begin{cases} u''(t) + \varphi(t, u(t), u'(t)) = 0 & \text{dla t} \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

dla funkcji ciągłej $\varphi\colon [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Wiadomo (por. [10]), że istnieje liniowy i ciągły operator $T\colon C[0,1] \to C^1[0,1]$, dla którego

$$Th = u \Leftrightarrow \begin{cases} u''(t) + h(t) = 0 & \text{dla t} \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Z powyższym zagadnieniem (3.2) możemy skojarzyć ciąg zagadnień

$$\begin{cases} u''(t) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi(\frac{k}{n}, u(\frac{k}{n}), u'(\frac{k}{n})) t^k (1-t)^{n-k} = 0 & \text{dla } t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Tak postawiony problem jest właściwie skończenie wymiarowy – jego rozwiązaniem jest wielomian stopnia co najwyżej $n+2$. Dobrze to widać, gdy popatrzymy na to zagadnienie w języku odwzorowań w przestrzeniach Banacha. W ten sposób z zagadnieniem (3.2) możemy skojarzyć odwzorowanie $f\colon C^1[0,1] \to C^1[0,1]$ dane wzorem $f(u) = u - T\Phi(u)$, gdzie $\Phi\colon C^1[0,1] \to C[0,1]$ jest odwzorowaniem Nemytskiego skojarzonym z φ, danym wzorem $\Phi(u)(t) = \phi(t, u(t), u'(t))$. Oczywiście $f(u) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy u jest rozwiązaniem zagadnienia (3.2).

Zauważmy, że wówczas zagadnienie (3.3) możemy zapisać przy pomocy równania $f_n(u) = 0$, gdzie $f_n\colon C^1[0,1] \to C^1[0,1]$ dane jest wzorem

$$f_n(u) = u - TB_n\Phi(u). \tag{3.4}$$

Jeżeli funkcja φ nie zależy od u', tzn. $\varphi\colon [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, to równanie (3.4) możemy w naturalny sposób potraktować jako zagadnienie skończenie wymiarowe. Otóż równoważnym do (3.4) jest równanie $g_n(x) = 0$, dla funkcji $g_n\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ danej wzorem

$$g_n(x) = x - A_n\left(\varphi(0, x_0), \varphi(\frac{1}{n}, x_1), \ldots, \varphi(1, x_n)\right),$$

gdzie $x = (x_0, \ldots, x_n)$, zaś $A_n\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ jest odwzorowaniem liniowym o macierzy $[a_{i,j}]$, $a_{i,j} = \binom{n}{j}[T(t^j(1-t)^{n-j})](\frac{i}{n})$.

Rzeczywiście, zagadnienie (3.3) może być zapisane inaczej jako

$$u = T\Big[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi(\frac{k}{n}, u(\frac{k}{n})) t^k (1-t)^{n-k}\Big]. \tag{3.5}$$

Załóżmy bowiem, że istnieje rozwiązanie $u \in C^1[0,1]$ zagadnienia (3.5). Zauważmy, że jeśli do wzoru (3.5) podstawimy $t = \frac{j}{n}$, uzyskamy

$$u(\frac{j}{n}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi(\frac{k}{n}, u(\frac{k}{n}))[Tt^k(1-t)^{n-k}](\frac{j}{n}),$$

co pokazuje, że $g_n(x) = 0$, dla $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ oraz $x_i = u(\frac{i}{n})$.

Z drugiej strony, jeśli $x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ jest zerem odwzorowania g_n, to funkcja $u(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi(\frac{k}{n}, x_k) T[t^k(1-t)^{n-k}]$ jest rozwiązaniem (3.5).

W pracy [8] pokazane są dobre własności tej aproksymacji – w szczególności to, że jej rozwiązania leżą blisko rozwiązań aproksymowanego zagadnienia (3.2). Jest to oczywiście dobra wiadomość, jednak sam fakt tego rodzaju zgodności zagadnienia aproksymującego z aproksymowanym nie jest niczym szczególnym – podobnie zachowuje się wiele schematów numerycznego rozwiązywania zagadnień dla równań różniczkowych (patrz [14],[7]). Dużo ważniejszą zaletą jest to, że ze względu na fakt, iż wielomiany Bernsteina generowane są przez ciągłe odwzorowanie liniowe B_n o normie 1 oraz w odpowiedniej normie zachodzi $\|B_n(u) - u\| \to 0$, możemy przy pomocy operatora B_n budować, w naturalny sposób, przeróżne schematy aproksymacyjne. Co więcej, możemy zapewnić sobie wymaganą gładkość uzyskiwanych aproksymacji. Choć tempo zbieżności wielomianów Bernsteina nie jest oszałamiające – zwykle więc nie wykorzystuje się tak konstruowanych schematów do poprawienia wydajności algorytmów, to jednak pojawiło się wiele pomysłów na poprawienie tempa zbieżności. Warto w tym miejscu wspomnieć choćby o pracy [4] wprowadzającej liniowe kombinacje wielomianów Bernsteina, pracy [22] proponującej uogólnienie wielomianów Bernsteina w postaci q-wielomianów, czy pracy [20] przedstawiającej zalety iterowanych aproksymacji.

LITERATURA

[1] S. Bernstein, *Démonstration du théorème de Weierstrass, fonde sur le probabilités*, Comm. Soc. Math. Kharkov 13: 1–2, 1912.

[2] M.I. Bhatti, P. Bracken, *Solutions of differential equations in a Bernstein polynomial basis*, Journal of Computational and Applied Mathematics 205(1): 272–280, 2007.

[3] B.M. Brown, D. Elliot, D.F. Paget, *Lipschitz constants for the Bernstein polynomials of a Lipschitz continuous function*, J. Approx. Theory 49: 196–199, 1987.

[4] P.L. Butzer, *Linear combinations of Bernstein polynomials*, Canadian J. Math 5: 559–567, 1953.

[5] R. Constantine Jr., *Variation norm convergence of function sequences*, Proceedings of the American Mathematical Society 45: 339–345, 1974.

[6] C. Cottin, H.H. Gonska, *Simultaneous approximation and global smoothness preservation*, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo 33: 259–279, 1993.

[7] M. Dryja, J. Jankowska, M. Jankowski, *Metody numeryczne, tom 2*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1982

[8] J. Gulgowski, *Bernstein approximations of nonlinear Sturm-Liouville problems*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 72(6): 2982–2989, 2010.

[9] D. Hajek, *Uniform polynomial approximation*, Amer. Math. Monthly 72: 681, 1965.

[10] P. Hartman, *Ordinary differential equations*, Birkhauser, Boston-Basel-Stuttgart, 1982.

[11] M. Kac, *Une remarque sur les polynomes de M.S. Bernstein*, Studia Math. 7: 49–51, 1938.

[12] M. Kac, *Reconnaissance de priorité relative à ma note "Une remarque sur les polynomes de M. S. Bernstein"*, Studia Math. 8: 170, 1939.

[13] W. Kratz, U. Stadtmüller, *On the uniform modulus of continuity of certain discrete approximation operators*, J. Approx. Theory 54 (3):326–337, 1988.

[14] J. Jankowska, M. Jankowski, *Metody numeryczne, tom 1*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1981

[15] G.G. Lorentz, *Bernstein Polynomials*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1993.

[16] T. Lindvall, *Bernstein polynomials and the law of large numbers*, Math. Scientist 7: 127–139, 1982.

[17] S. Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, PWN, Warszawa, 1976.

[18] A. Mongelli, S. Noschese, *Uniform polynomial approximation to solutions of the Cauchy problem for O.D.E.*, Riv. Mat. Univ. Parma 3(6): 195–204, 2000.

[19] P. Mathé, *Approximation of Hölder Continuous Functions by Bernstein Polynomials*, The American Mathematical Monthly 106(6): 568–574, 1999.

[20] S. Ostrovska, *q-Bernstein polynomials and their iterates*, J. Approx. Theory 123(2): 232–255, 2003.

[21] G.M. Phillips, *Interpolation and Approximation by Polynomials*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[22] G.M. Phillips, On Generalized Bernstein Polynomials. In *Approximation and optimization*, vol. I (Cluj-Napoca, 1996): 335-340, Transilvania, Cluj-Napoca, 1997.

BARBARA WOLNIK
INSTYTUT MATEMATYKI, UNIWERSYTET GDAŃSKI, UL. WITA STWOSZA 57, 80-952 GDAŃSK
Adres e-mail: Barbara.Wolnik@mat.ug.edu.pl

JACEK GULGOWSKI
INSTYTUT MATEMATYKI, UNIWERSYTET GDAŃSKI, UL. WITA STWOSZA 57, 80-952 GDAŃSK
Adres e-mail: dzak@mat.ug.edu.pl