



Centrum
Zastosowań
Matematyki

Między teorią a zastosowaniami – matematyka w działaniu.

Będlewo, 25–30 maja 2015 r.



**POLITECHNIKA
GDAŃSKA**

WYDZIAŁ FIZYKI TECHNICZNEJ
I MATEMATYKI STOSOWANEJ

Centrum Zastosowań Matematyki

Politechnika Gdańska, Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej

ul. G. Narutowicza 11/12, 80-233 Gdańsk, tel. +48 58 347 26 49

www.czm.mif.pg.gda.pl

Spis prelegentów

1	Komitet Naukowy i Organizacyjny	1
2	Liderzy sesji tematycznych	2
2.1	Piotr Bartłomiejczyk: Modelowanie zjawisk z dyfuzją	2
2.2	Marek Bodnar: Modele matematyczne reakcji biochemicznych	2
2.3	Dariusz Bugajewski: Prawieokresowość - teoria i zastosowanie	3
2.4	Agnieszka Gil-Świdorska: Równanie dyfuzji w opisie zjawisk zachodzących w heliosferze	5
2.5	Agnieszka Kałamajska: Zdegenerowane równania eliptyczne i zastosowania	6
2.6	Piotr Maćkowiak: Teoria punktu stałego a ekonomia	6
2.7	Dorota Mozyrska: Metody stabilizacji dynamiki populacyjnej	7
2.8	Justyna Signerska-Rynkowska: Układy dynamiczne w modelowaniu komórek nerwowych i sieci neuronowych	8
2.9	Agnieszka Wiszniewska-Matyszek: Teoria gier i jej zastosowania	9
3	Sesje gości zagranicznych	10
3.1	Krzysztof Bartoszek: Phylogenetic comparative methods: applying modern probabilistic methods to evolutionary biology	10
3.2	Paweł Pilarczyk: Automatic classification of global dynamics in multi-parameter systems	11
3.3	Jonathan Touboul: The complex interplay between structure and function in the brain: from experiments to theory	13
4	Uczestnicy sesji z referatem	14
4.1	Łukasz Balbus: O nieujemnych, rekursywnych funkcjach użyteczności z nieujemną funkcją agregacyjną	14
4.2	Małgorzata Ćwiklińska-Jurkowska: Czynniki użyteczności fuzji klasyfikatorów metodami bagging i boosting na podstawie kilku problemów diagnostycznych	14
4.3	Włodzimierz Domański: Prawie-okresowość i fizyka quasikryształów	15
4.4	Ewa Girejko: O stabilizacji wielkości populacji metodą ALC	16
4.5	Jacek Gulowski: Metody stopnia topologicznego w poszukiwaniu rozwiązań okresowych	16

4.6	Danuta Jaruszewska–Walczak: Metoda Rothe dla układów hiperbolicznych w postaci kanonicznej Schaudera	17
4.7	Agnieszka Kaczkowska: Różne typy entropii i ich zastosowania do analizy danych kardiologicznych	17
4.8	Piotr Kasprzak: Prawieokresowość w modelach typu <i>integrate-and-fire</i>	18
4.9	Bogdan Kaźmierczak: Problemy matematyczne w nowym modelu szybkich fal wapniowych	18
4.10	Grzegorz Kosiorowski: Dynamika ewolucyjna procesów asymilacyjnych z uwzględnieniem względnego niedostatku	19
4.11	Tadeusz Kosztołowicz: Zastosowanie modelu błędzenia losowego cząsteczki do modelowania procesów subdyfuzji–reakcji	19
4.12	Monika Krasowska: Wykorzystanie teorii perkolacji w badaniach morfologii materiałów polimerowych na przykładzie polidimetakrylanów stomatologicznych	21
4.13	Szymon Łęski: Modelowanie mocy i zasięgu zewnątrzkomórkowego pola elektrycznego w populacji neuronów korowych	21
4.14	Jacek Leśkow: Funkcje relatywnie mierzalne i zjawiska prawie okresowe	22
4.15	Ivan Matychyn: Czasooptymalne sterowanie układami niecałkowitego rzędu	22
4.16	Tomasz P. Michalak: Obliczanie Synergii	23
4.17	Zbigniew Peradzyński: Matematyczne modelowanie silników jonowych stosowanych w technice kosmicznej	23
4.18	Anna Strzelewicz: Opis i analiza transportu masy par i gazów przez membrany magnetyczne	24
4.19	Joachim Syga: Wielowartościowe całki i inkluzje stochastyczne w modelu finansowym	25
4.20	Anna Szafrńska: Niestandardowa analiza numeryczna modelu drapieżnik–ofiara opisanego układem równań różniczkowych niecałkowitego rzędu	26
4.21	Krzysztof A. Topolski: Uogólnione rozwiązania zdegenerowanych nierówności parabolicznych	26
4.22	Anna Wawrzynczak: Zastosowanie stochastycznych równań różniczkowych w modelowaniu transportu cząstek galaktycznego promieniowania kosmicznego w heliosferze	27
4.23	Paweł Wojda: Wyznaczanie propagacji promieniowania rentgenowskiego dla układów optycznych składających się z wielu soczewek przy pomocy metody różnic skończonych	27

4.24 Łukasz Woźny: Równowagi Markowa w dynamicznych, supermodularnych gospodarkach z continuum graczy i brakiem zagregowanego ryzyka .	28
4.25 Małgorzata Wyrwas: Badanie stabilności i stabilizacja liniowych układów różnicowych niecałkowitego rzędu z wykorzystaniem $\mathcal{Z}$ -transformaty .	29
Indeks nazwisk	30

1 Komitet Naukowy i Organizacyjny

Komitet Naukowy:

- Grzegorz Graff (Politechnika Gdańska)
- Mirosław Lachowicz (Uniwersytet Warszawski)
- Wacław Marzantowicz (Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu)
- Marian Mrozek (Uniwersytet Jagielloński)
- Paweł Strzelecki (Uniwersytet Warszawski)

Organizatorzy:

- Agnieszka Bartłomiejczyk
- Urszula Goławska
- Grzegorz Graff
- Marcin Styborski



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

2 Liderzy sesji tematycznych

2.1 Modelowanie zjawisk z dyfuzją

Lider sesji: Piotr Bartłomiejczyk, Politechnika Gdańska

Tytuł odczytu: *Fale biegnące w równaniach reakcji-dyfuzji.*

Pojęcie dyfuzji służy do opisu zjawisk fizycznych (przenikanie się gazów, przepływ ciepła), chemicznych (wyrównywanie stężeń), biologicznych (osmoza, modele ekologiczne), medyczne (oddychanie), a nawet społecznych czy ekonomicznych. Pojawia się zatem w wielu różnych naukach, a modelowana jest przy użyciu różnych koncepcji matematycznych. Podstawowe, a dzisiaj już klasyczne, prawa dyfuzji zostały sformułowane przez niemieckiego fizjologa, fizyka i matematyka Adolfa Ficka w połowie XIX wieku w języku analizy wektorowej i równań różniczkowych. Inne podejście wykorzystuje koncepcję błędzenia losowego odkrytego w pierwszej połowie XIX wieku przez Roberta Browna (ruchy Browna). Teoria ruchów Browna była potem rozwijana przez wielu matematyków i fizyków, w tym również przez samego Alberta Einsteina, który wyprowadził równanie dyfuzji dla cząstki w ruchu Browna. Najprostsze i zarazem najbardziej naturalne uogólnienia równania dyfuzji stanowią układy reakcji-dyfuzji, które oprócz składnika dyfuzji zawierają składnik reakcji uwzględniający możliwość przemiany jednej substancji w drugą. Zjawiska modelowane za pomocą równań reakcji-dyfuzji i występują naturalnie w chemii, ale także w biologii i ekologii. Najprostsze jednowymiarowe wersje równania reakcji-dyfuzji były badane przez Kołmogorowa, Petrowskiego i Piskuna oraz Fishera (biologiczne modele rozprzestrzeniania się populacji) w pierwszej połowie XX wieku. Badanie dwuwymiarowych układów reakcji-dyfuzji rozpoczął w drugiej połowie XX wieku Alan Turing, który jako pierwszy zaobserwował, że w dwóch wymiarach stan stabilny w układzie bez dyfuzji może utracić stabilność po uwzględnieniu składnika dyfuzji. Rozwiązania równań reakcji-dyfuzji przejawiają szeroką skalę zachowań, włączając w to tworzenie się fal biologicznych, którym poświęcony będzie mój wykład.

2.2 Modele matematyczne reakcji biochemicznych

Lider sesji: Marek Bodnar, Uniwersytet Warszawski

Tytuł odczytu: *Nieujemność rozwiązań, stabilność i bifurkacja Hopfa w modelach reakcji biochemicznych z opóźnieniem.*



Projekt jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Modele matematyczne reakcji biochemicznych są bardzo różnorodne: od prostych układów składających się z kilku równań różniczkowych zwyczajnych poprzez rozbudowane układy kilkudziesięciu lub kilkuset równań, do modeli zawierających równania z opóźnionym argumentem i równania różniczkowe cząstkowe. Za ich pomocą są modelowane zarówno stosunkowo proste zjawiska, na przykład produkcji i degradacji białka, jak i niezwykle skomplikowane ścieżki sygnałowe. O ile modele składające się z kilku równań zwykle poddają się analizie matematycznej, to bardziej skomplikowane modele można analizować praktycznie wyłącznie przy użyciu numeryki. Przykładami w miarę prostych modeli są układy równań opisujące procesy ekspresji genów. Dwa takie modele, jeden dotyczący białka Hes 1 a drugi białka p53, zaproponował w 2003 Monk. W obu modelach występuje jest opóźnienie odzwierciedlające fakt, że procesy transkrypcji i translacji trwają dłużej niż inne procesy uwzględnione w tych modelach. Opóźnienie, w połączeniu z obecnymi w modelach ujemnymi sprzężeniami zwrotnymi, może powodować (dla pewnych zakresów parametrów) pojawianie się stabilnych oscylacji, które są obserwowane doświadczalnie.

W trakcie mojego wykładu opowiem o wpływie opóźnienia na dynamikę modeli reakcji biochemicznych i problemach, które mogą się pojawić gdy do modelowania procesów biochemicznych wykorzystujemy równania z opóźnionym argumentem.

2.3 Prawieokresowość - teoria i zastosowanie

Lider sesji: Dariusz Bugajewski, UAM w Poznaniu

Tytuł odczytu: *O pewnych klasach funkcji prawie okresowych (niekoniecznie ograniczonych).*

Teoria funkcji prawie okresowych rozwijana jest intensywnie od początku dwudziestego wieku. Za jej twórcę uważa się matematyka duńskiego H. Bohra, jakkolwiek pewnych inspiracji do badania prawieokresowości można dopatrywać się już w pracach J.L. Lagrange'a. Przypomnijmy, że funkcje prawie okresowe pojawiają się w klasycznych zagadnieniach mechaniki, kiedy rozważa się składanie drgań o niewspółmiernych okresach. Zwróćmy również uwagę na interesujący fakt, że quasikryształy, z matematycznego punktu widzenia, można opisać, mówiąc nieprecyzyjnie, jako próbki (wzorce) miar prawie okresowych, to znaczy zbiory, których funkcje charakterystyczne definiują miary prawie okresowe.

Napisano już setki prac dotyczących funkcji prawie okresowych, a więc mogłoby się wydawać, że teoria ta jest już bardzo wyeksploatowana. Okazuje się jednak, że szereg podstawowych kwestii w tej teorii nadal pozostaje otwartych. Wystarczy wymienić

tutaj problem istnienia prawie okresowych rozwiązań klasycznych nieliniowych równań różniczkowych.

W wykładzie przedstawimy przede wszystkim nowe wyniki dotyczące funkcji prawie okresowych w sensie Lewitana oraz prawie okresowych względem miary Lebesgue'a. Szczególną uwagę zwrócimy na operatory splotu oraz na rozwiązania klasycznego równania ewolucji w tych przestrzeniach.

Prezentacje:

1. Prawieokresowość w modelach typu "integrate and fire" (P. Kasprzak, WMI UAM Poznań).
2. Quasikryształy - wzorce miar prawie okresowych (P. Maćkowiak, KEM UE Poznań, J. Sadowski, WMI UAM Poznań).

Ad 1. Jednym z zastosowań układów integrate-and-fire jest modelowanie dynamiki aktywności komórek nerwowych. W tych zazwyczaj jednowymiarowych modelach, dynamika opisywana przez równanie różniczkowe zostaje zaburzona tak zwanym "żesetowaniem" do wartości spoczynkowej. We wspomnianym na wstępie modelu, resetowanie związane jest ze zjawiskiem generowania potencjału czynnościowego przez neuron, w ogólności natomiast odpowiada sytuacji, gdy układ oscylujący ma praktycznie natychmiastowy czas "relaksacji". Mimo, iż modele takie są mniej realistyczne (niż na przykład model neuronu Hodgkina-Huxley'a), to dzięki swej prostocie są one powszechnie rozważane. Celem wykładu będzie omówienie ogólnych własności układów typu integrate-and-fire, dotyczących w szczególności tak zwanego firing map, to jest odwzorowania stowarzyszonego z wyjściowym układem, którego analiza jest źródłem wielu jakościowych informacji o rozważanym zjawisku. Zainteresowani będziemy głównie sytuacją, gdy funkcja wymuszająca jest okresowa lub prawie okresowa.

Ad 2. Quasikryształy, odkryte przez D. Schechtmana w 1982 r. są strukturami, które cechuje pewna regularność, podobna do krystalicznej. To, co je odróżnia, to fakt, iż kryształy tworzą trójwymiarową strukturę okresową, podczas gdy quasikryształy mogą być opisywane jako okresowe dopiero w przestrzeniach wyżej wymiarowych. Podczas wykładu podamy definicję quasikryształu jako wzorca prawie okresowego. W tym celu wprowadzimy pewne uogólnienie funkcji prawie okresowej w sensie Bohra oraz przyjrzymy się miarom prawie okresowym. Okazuje się, że quasikryształy generują pewne uogólnione miary prawie okresowe.

2.4 Równanie dyfuzji w opisie zjawisk zachodzących w heliosferze

Lider sesji: Agnieszka Gil-Świdarska, UPH w Siedlcach

Tytuł odczytu: *Badanie słoneczno-ziemskich związków za pomocą równania transportu cząstek promieniowania kosmicznego.*

Ciekawość człowieka jest tym co nieustannie napędza rozwój, co sprawia, iż budujemy mikroskopy elektronowe, akceleratory cząstek czy sondy kosmiczne. Chcemy wiedzieć! Chcemy poznawać, chcemy zrozumieć.

Do Ziemi nieprzerwanie dociera strumień promieniowania kosmicznego, składający się w przeważającej większości z protonów. Poziom natężenia promieniowania kosmicznego jest ujemnie skorelowany z poziomem aktywności Słońca. Natężenie promieniowania kosmicznego od połowy lat 50 ubiegłego wieku jest rejestrowane na Ziemi dzięki globalnej sieci supermonitorów neutronowych i teleskopów mezonowych. Dane otrzymane z licznych sond kosmicznych pokazują jedynie lokalną sytuację w przestrzeni międzyplanetarnej w okolicach orbity danego próbnika. Natomiast dane o natężeniu galaktycznego promieniowania kosmicznego pobrane z monitorów neutronowych i teleskopów mezonowych charakteryzują globalną sytuację w przestrzeni międzyplanetarnej, dzięki czemu mogą stanowić unikalne narzędzie służące badaniu ogólnych warunków panujących w pobliżu orbity Ziemi. Mogą być traktowane jako uniwersalny wskaźnik występujących w przestrzeni międzyplanetarnej zakłóceń rozchodzących się w dużych obszarach heliosfery.

Transport cząstek promieniowania kosmicznego w heliosferze zachodzi pod wpływem nieustająco ekspandującego od Słońca wiatru słonecznego unoszącego wzmrożone pole magnetyczne. Modulacja galaktycznego promieniowania kosmicznego w heliosferze zachodzi w głównej mierze w następstwie fundamentalnych procesów: dyfuzji, konwekcji, dryfów oraz zmiany energii cząstek promieniowania kosmicznego w odpowiedzi na interakcje z wiatrem słonecznym. Do opisu zagadnień słonecznej modulacji promieniowania kosmicznego w różnych skalach czasowych służy równanie transportu Parkera (1965). Jest to niestacjonarne, czterowymiarowe (trzy zmienne przestrzenne oraz energia cząstek promieniowania kosmicznego) równanie różniczkowe cząstkowe II rzędu typu parabolicznego. Rozwiązanie tegoż równania w sposób analityczny jest niemożliwe, a jedynie w sposób numeryczny przy użyciu np. metody różnic skończonych, czy też stochastycznych równań różniczkowych.

Zaletą matematycznego modelowania transportu cząstek galaktycznego promieniowania kosmicznego w heliosferze jest możliwość dokonania porównania wyników rozwiązania numerycznego z rezultatami obserwacji.



Projekt jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

2.5 Zdegenerowane równania eliptyczne i zastosowania

Lider sesji: Agnieszka Kałamajska, Uniwersytet Warszawski, IM PAN Warszawa

Tytuł odczytu: *O problemie poprawnego postawienia zagadnień brzegowych i początkowych w przestrzeniach Sobolewa oraz Orlicza-Sobolewa wyposażonych w wagi.*

Zdegenerowane równania eliptyczne i paraboliczne występują w wielu modelach matematycznych matematyki stosowanej. Stosujemy je na przykład w zagadnieniach typu dyfuzji, w równaniach logistycznych matematycznej biologii, w astrofizyce, elektrostatyce, chemii, emkononii czy w teorii sprężystości. Równania te sprawiają trudności, gdyż często aparat analizy funkcjonalnej używany standardowo do dowodzenia istnienia, jednoznaczności czy jakościowych własności rozwiązań jest niewystarczający. Nie jest bowiem jeszcze dobrze rozwinięta teoria przestrzeni typu Sobolewa czy innych przestrzeni funkcyjnych z wagami. Potrzebne są na przykład twierdzenia o zanurzaniu z analizą ich zwartości, twierdzenia śladzie, twierdzenia o przedłużaniu, równoważne charakterystacje przestrzeni funkcyjnych, teoria moltiplikatorów w analizie harmonicznej związana z analizą z wagami, czy analiza na przestrzeniach metrycznych, gdyż zamiast badań w przestrzeni Euklidesowej możemy mieć do czynienia na przykład z analizą na fraktalach, mającej motywację na przykład w badaniach meteorologicznych. Celem spotkania byłoby:

- znalezienie motywacji do badań wynikającej z przedstawienia i analizy konkretnych modeli oraz
- przedstawienie problemów wynikających z analizy modeli wkraczających w zakres szeroko pojętej analizy, na przykład analizy funkcjonalnej czy harmonicznej.

2.6 Teoria punktu stałego a ekonomia

Lider sesji: Piotr Maćkowiak, Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

Tytuł odczytu: *Równowaga w prostym modelu wymiany.*

Równowaga jest dla teorii ekonomii pojęciem podstawowym. Oznacza ona pewien stan niezmienniczy (inwariantny), w którym gospodarka może pozostawać dowolnie długo. W gospodarce konkurencyjnej równowagę zwykle utożsamia się z cenami równowagi, tj. takimi cenami przy których dochodzi do zrównania popytu z podażą, przy czym konsumenci i producenci realizują swoje zamiary; w ekonomii neoklasycznej, a również na



Projekt jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

gruncie modeli input-output, w równowadze znajduje się gospodarka, która rośnie w sposób równomierny zachowując strukturę i tempo wzrostu (tzw. równowaga wzrostu), etc. Przyjęcie paradygmatu równowagi w ekonomii umożliwia konstrukcję matematycznych obrazów gospodarki (modeli), w których stan równowagi utożsamia się ze stanem stacjonarnym systemu dynamicznego opisywanego przez układ równań (lub ogólniej inkluzji) różniczkowych lub różnicowych. Tak rozumiany stan równowagi jest funkcją parametrów modelu (zwanych parametrów równowagi), dzięki czemu możemy śledzić wpływ parametrów modelu na funkcjonowanie gospodarki, co stwarza szerokie pole zastosowań dla modelowania matematycznego z perspektywy (teorii) ekonomii i podejmowania decyzji. Podstawowym problemem, nawet z punktu widzenia zastosowań, jest zatem istnienie stanu równowagi, który formalnie można traktować jako punkt stały (lub zero) odpowiedniego przekształcenia.

2.7 Metody stabilizacji dynamiki populacyjnej

Lider sesji: Dorota Mozyrska, Politechnika Białostocka

Tytuł odczytu: *Stabilizacja populacji metodą ALC.*

Zastosowania metod matematycznych w opisie procesów biologicznych to najczęściej modelowanie dynamiki populacji. Jedną ze szczególnie pożądaną własności dynamiki populacji jest odpowiednio określona, dostosowana do interpretacji w opisie populacji, stabilność układu. W ciągu ostatniego dwudziestolecia zaproponowano kilka sposobów stabilizacji dynamiki opisującej populacje biologiczne pojedynczego gatunku jak i meta-populacji. Metody te poddawano weryfikacji stosując różne modele dynamiki populacji modele i bardzo różne koncepcje stabilności. Należy zwrócić uwagę, iż dynamiki populacji są zależne od historii życia gatunku, rozwoju pokoleń ale także od wpływu innych czynników. Ponadto można rozważać różne rodzaje stabilności wielkości populacji. W celu utrzymania poziomu populacji stosuje się również odpowiednie metody sterowania poziomem populacji. Jedną ze stosowanych metod jest np. ALC (Adaptive Limiter Control). Badanie przydatności danej metody może zostać przeprowadzone numerycznie lub analitycznie. Wydaje się zasadne dokonanie przeglądu różnych metod stabilności zarówno dla dynamiki z czasem ciągłym jak i dyskretnym. Ponadto zasadne wydaje się zastosowanie własności granicznych układów dyskretnych lub ciągłych. Modelowanie może dotyczyć populacji badanych w warunkach laboratoryjnych z zachowaniem w modelu odpowiedniego zaburzenia.

2.8 Układy dynamiczne w modelowaniu komórek nerwowych i sieci neuronowych

Lider sesji: Justyna Signerska-Rynkowska

Tytuł odczytu: *Nieciągłe odwzorowania odcinka w analizie nisko-wymiarowych układów typu integrate-and-fire.*

Próby opisanie zachowania się biologicznych neuronów sięgają przynajmniej początków XX w., kiedy to w 1907 r. francuski neurobiolog Louis Lapicque podał pierwszy prosty model pojedynczego neuronu składający się z jednego prostego równania różniczkowego. Dzisiaj model ten, lekko zmodyfikowany, wraz z dodatkowym warunkiem "resetowania" znany jest jako "leaky integrate-and-fire" i pozostaje często używany zwłaszcza w symulacjach dużych sieci neuronowych. Innym przełomowym momentem było niewątpliwie sformułowanie w 1952 r. przez Alana Hodgkina i Andrew Huxleya modelu opisującego mechanizmy jonowe w neuronie w wyniku badań eksperymentalnych nad aksonem kałamarnicy olbrzymiej (za które otrzymali zresztą później nagrodę Nobla). Model ten składał się już z czterech równań różniczkowych, zdecydowanie nieliniowych. Od tego czasu powstało wiele innych modeli, mających często służyć za modele uproszczone oryginalnego układu Hodgkina i Huxleya, stąd bardziej wydajne w wielkoskalowych symulacjach sieci neuronowych, a jednocześnie będących w stanie odzwierciedlić istotne z danego punktu widzenia właściwości elektrofizjologiczne neuronu.

Z drugiej strony, w szczególności tzw. "hybrydowe" układy dynamiczne, będące połączeniem układów ciągłych z dyskretnymi stanowią obecnie obiekt wzrastającego zainteresowania ze względu na olbrzymi potencjał w modelowaniu różnego rodzaju zjawisk fizycznych, biologicznych czy ekonomicznych, a jednocześnie są one wyzwaniem z matematycznego punktu widzenia, ponieważ metody ich badania dopiero zaczynają się rozwijać. Przykładowo, w modelach aktywności neuronów możemy opisać ewolucję w czasie potencjału błonowego komórki oraz innych zmiennych biologicznych za pomocą równań różniczkowych, a z kolei zjawiska generacji potencjału czynnościowego jako dyskretnie "wydarzenia" polegające na "resetowaniu" tych zmiennych w odpowiednich momentach, wprowadzające nieciągłości do początkowej ciągłej dynamiki zadanej przez równania różniczkowe. Okazuje się, że w tym wypadku (są to właśnie tzw. modele typu integrate-and-fire) dynamikę układu można efektywnie opisać za pomocą odwzorowania zwanego firing/adaptation map, którego orbity odzwierciedlają naturę "spike-trains" (szeregu czasowego kolejnych potencjałów czynnościowych). Analizę firing/adaptation map można sprowadzić do badania odwzorowań okręgu lub odcinka (w tym również odwzorowań

nieciągłych), wykorzystując m.in. teorię rotacji.

Wiele modeli cały czas dostarcza interesujących wyzwań w dziedzinie matematyki, w szczególności układów dynamicznych. Współczesne metody matematyczne stosowane przy ich analizie wykorzystują między innymi nowe interesujące rodzaje bifurkacji (np. tzw. "canards") czy oscylacji (tzw. Mixed-Mode Oscillations), a także stochastyczne równania różniczkowe. Można sobie wyobrazić, że jeśli dynamika jednej komórki jest już dość skomplikowana, to próba rygorystycznego opisanie całej sieci oddziałujących ze sobą neuronów jest jeszcze trudniejszym zadaniem.

2.9 Teoria gier i jej zastosowania

Lider sesji: Agnieszka Wiszniewska-Matyszek, Uniwersytet Warszawski

Tytuł odczytu: *"Nikt nie jest samotną wyspą" - teoria gier jako matematyczne narzędzie do rozwiązywania problemów podejmowania decyzji w sytuacji interakcji. Zastosowania w różnych dziedzinach.*

Teoria gier to dziedzina matematyki będąca narzędziem do opisu takich sytuacji podejmowania decyzji, w których podejmujących decyzje (zwanych graczami) jest co najmniej dwóch, mają oni różne cele (co można wyrazić przez maksymalizację pewnych funkcji wypłaty) i występuje pomiędzy nimi pewna interakcja, przez co decyzje podjęte przez gracza (definiujące jego strategię) mają wpływ na realizację celu przez innych graczy (czyli argumentami funkcji wypłaty graczy są całe profile strategii, wybranych przez wszystkich graczy). Teoria gier jest więc narzędziem do modelowania zarówno sytuacji konfliktu, jak i kooperacji.

Sesja tematyczna będzie poświęcona teorii gier i jej zastosowaniom w różnych dziedzinach — zarówno nauki, jak i życia. Sesja będzie zapoczątkowana wykładem wprowadzającym do teorii gier, w tym także gier dynamicznych. W ramach tego wykładu uczestnicy zapoznają się między innymi z równowagą Nasha i optymalnością w sensie Pareto. W ramach sesji planowane są też wystąpienia uczestników, dotyczące między innymi dużych gier, gier dynamicznych, gier kooperacyjnych, gier stochastycznych, gier na grafach, a także zastosowań teorii gier w ekonomii, ekologii, socjologii, kryminalistyce, obronie narodowej czy biologii.



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3 Sesje gości zagranicznych

3.1 Phylogenetic comparative methods: applying modern probabilistic methods to evolutionary biology

Krzysztof Bartoszek, Uppsala University, Szwecja

Since Darwin biologists have recognized the need for a specialized mathematical apparatus to study inter-species measurements. However it was only Felsenstein [1985]’s independent contrasts method [although similar models were discussed earlier, e.g. Edwards, 1970] that proposed an appropriate framework for correctly analyzing trait data obtained from different taxonomic units. What makes such data different from the usual independent, identically distributed sample setting is that species level measurements are not independent. Due to a shared evolutionary history one can easily observe that more recently diverged species tend to be similar. Therefore using standard statistical methodologies, will make it impossible to distinguish between similarities due to shared environment or trait function (selection and adaptation) and phylogenetic inertia.

To remedy this situation Felsenstein [1985] assumed that a trait evolves as a Brownian motion on top of a phylogenetic tree. Along a branch we have usual Brownian motion evolution until a speciation point is reached. After speciation along the daughter branches two independent Brownian motions start running. Their initial values are the value of the process just before the speciation event. Very quickly this method (called independent contrasts in the biological community) became a field standard.

However Felsenstein [1988], Hansen [1997] pointed out that a Brownian motion model is not appropriate for traits under stabilizing selection - a pure Brownian motion has no stationary distribution. Therefore they proposed an Ornstein–Uhlenbeck model. Only now due to the increase of computational power is this process taking its place in an evolutionary biologist’s toolbox [Butler and King, 2004, Labra et al., 2009, Hansen and Orzack, 2005, Hansen et al., 2008]. This framework is currently undergoing rapid expansion allowing for measurement error [Felsenstein, 2008, Hansen and Bartoszek, 2012, Rohlf et al., 2013], multiple interacting traits [Bartoszek et al., 2012] or different drift and diffusion parameters for different clades [Beaulieu et al., 2012].

Usually a phylogenetic comparative method will assume that the tree describing the relationships between species is fully resolved. This however need not always be the case. We do not know all the currently alive species, they are often reclassified or they are undergoing speciation. What may happen also in many insect orders is that molecular based tree inference methods can resolve the tree on the family level but there is not

enough information to say much about the clades' subtrees. Hence there is also a need for tree-free methods. These methods only assume a branching process model conditioned on the number of contemporary tips for the phylogenetic tree. Of course with an unknown tree we can infer much less about the process driving the phenotype's evolution. However we still may infer a remarkable amount of information and also gain new insights into the species' evolution.

Using this tree-free framework we may study the expected similarity of species and how quickly they lose it via the so-called interspecies correlation coefficient [Bartoszek, 2014, Bartoszek and Sagitov, 2015, Mulder and Crawford, 2015, Sagitov and Bartoszek, 2012]. We may also derive phylogenetic confidence intervals for the optimal trait values and effectively estimate the stationary variance of an adapting trait [Bartoszek and Sagitov, 2015] or diffusion parameter of a Brownian motion one [Bartoszek and Sagitov, 2014, Crawford and Suchard, 2013]. These methods also allow one to observe a phase transition in phylogenetic inertia. If the speciation process is fast enough then ancestral dependencies have an effect for long stretches [Adamczak and Miłoś, 2011, in press, Ané et al., 2014, Bartoszek and Sagitov, 2015].

In the first lecture hour I will introduce the field of phylogenetic comparative methods, discuss the biological motivation and mathematical approach of using diffusion type stochastic differential equations to model inter-species data. I will discuss multivariate and measurement error extensions to these methods and illustrate why these are important. The second lecture hour will be more theoretical concentrating on tree-free methods. I will discuss their probabilistic background and what model parameters can be inferred using them.

Spis literatury na stronie www.czm.mif.pg.gda.pl

3.2 Automatic classification of global dynamics in multi-parameter systems

Paweł Pilarczyk, Institute of Science and Technology, Austria

A dynamical system is a mathematical concept for describing an object varying in time, using a fixed rule that depends on the current state of the object (and not on its past). Dynamical systems can be used to describe a variety of phenomena, such as the growth of a population or spread of an infectious disease. In the first part of the talk, I am going to introduce a framework for automatic classification of global dynamics in a dynamical system depending on a few parameters (such as fertility rates or disease transmission

rates). A set-oriented topological approach will be used, based on Conley's idea of a Morse decomposition (see [3]), combined with rigorous numerics, graph algorithms, and computational algebraic topology. This approach allows to effectively compute outer estimates of all the recurrent dynamical structures encountered in the system (such as equilibria or periodic solutions), as perceived at a prescribed resolution. It thus provides an automatic computational method for concise and comprehensive classification of all the dynamical phenomena found across the given parameter ranges (see [1], [2]). The method is mathematically rigorous (a.k.a. computer-assisted proof), and has a potential for wide applicability thanks to the mild assumptions on the system.

In the second part of the talk, I am going to discuss a few interesting applications. First, I am going to show a population model which contradicts the commonly held belief that the initial state of a population doesn't matter, because it will eventually stabilize at the equilibrium (see [1]). Next, I am going to show a model which shows that increasing the use of pesticides may sometimes actually increase the amount of pests (see [4]). Finally, I am going to show that incorporating spatial dispersal of individuals into a simple vaccination epidemic model may give rise to a model that exhibits rich dynamical behavior, not normally found in the simple epidemic models (see [5]).

Bibliography:

- [1] Z. Arai, W. Kalies, H. Kokubu, K. Mischaikow, H. Oka, P. Pilarczyk, *A database schema for the analysis of global dynamics of multiparameter systems*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst., Vol. 8, No. 3 (2009), 757-789.
- [2] J. Bush, M. Gameiro, S. Harker, H. Kokubu, K. Mischaikow, I. Obayashi, P. Pilarczyk, *Combinatorial-topological framework for the analysis of global dynamics*, Chaos, Vol. 22, No. 4 (2012), 047508.
- [3] C. Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index*, CBMS Regional Conference Series in Math., no. 38, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 178.
- [4] E. Liz, P. Pilarczyk, *Global dynamics in a stage-structured discrete-time population model with harvesting*, J. Theoret. Biol., Vol. 297 (2012), 148-165.
- [5] D.H. Knipf, P. Pilarczyk, G. Rost, *Rich bifurcation structure in a two-patch vaccination model*, submitted.

3.3 The complex interplay between structure and function in the brain: from experiments to theory

Jonathan Touboul, College de France & Inria

1. Topology of visual cortex: some theoretical thoughts and novel data, towards a theory of topological optimization.
2. The role of noise, disorder and heterogeneity in the dynamics of large cortical networks.

In these lectures. I will give an overview of two instances in which mathematical analysis lead to a better understanding of cortical function. Both will revolve around collective dynamics in the mammalian brain. In this domain, an ever-increasing amount of data challenges our understanding of cortex and function. At the center of this problem is the inter-relationship between structure and function of cortical networks, on which we will try to shed new light in the course of our lectures.

Ad 1. I will start by presenting some works dealing with the structure and function of the visual cortex. In the early visual cortex of higher mammals, information is processed within functional maps whose layout is thought to underlie visual perception. Here, I will present a few theoretical thoughts, simulations and experimental data on the possible principles at the basis of their architecture. as well as their possible role in perception. I will present new data on spatial frequency preference representation in cat: we evidence the presence of a continuous map with singularities around which the map organizes as an electric dipole potential. Mathematically, I will show that both architectures are the most parsimonious topologies ensuring local exhaustive representation. Eventually, I will show using computer simulations how these topologies may improve coding capabilities.

Ad 2. Another question that is largely open and that may be addressed using mathematics is the role of noise and disorder in the large-scale dynamics of neuronal networks. In order to investigate these questions, I will introduce the main mathematical tools. from the domain of probability theory. that are used in the modeling of large-scale neuronal networks involved at functional scales in the brain. Limits of large networks with complex topologies will be derived, and I will show how levels of noise shape the collective response, in particular I will present a particularly interesting transition to global synchronization in the network as noise is increased.

4 Uczestnicy sesji z referatem

4.1 O nieujemnych, rekursywnych funkcjach użyteczności z nieujemną funkcją agregacyjną

Łukasz Balbus, Uniwersytet Zielonogórski

Rozważany jest problem jednoznaczności i własności globalnego przyciągania rekursywnych użyteczności otrzymanych z równań Koopmansa. Równania te są wyznaczone przez funkcję agregacyjną spełniającą warunki niezależne od takich prac jak Le Van i Vailakis [1], Marinacci i Montrucchio [2], oraz Jaśkiewicz, Matkowski i Nowak [3]. Rozważane są również własności błędu obciążenia, operując na odpowiednim stożku w przestrzeniach funkcyjnych. Otrzymane rezultaty mogą zostać wykorzystane w teorii wzrostu, problemie eksploatacji zasobów i innych modelach ekonomicznych.

Literatura

- [1] Le Van, C. and Vailakis, Y. (2005) *Recursive utility and optimal growth with bounded or unbounded returns*. Journal of Economic Theory, vol. 123, pp. 187 - 209.
- [2] Marinacci, M., and Montrucchio, L. (2010) *Unique solutions for stochastic recursive utilities*. Journal of Economic Theory, 145, 1776-1804.
- [3] Jaśkiewicz, A., Matkowski, J. and Nowak, A.S. (2014) *On variable discounting in dynamic programming: applications to resource extraction and other economic models*. Annals of Operations Research, vol. 220, pp. 263-278

4.2 Czynniki użyteczności fuzji klasyfikatorów metodami bagging i boosting na podstawie kilku problemów diagnostycznych

Małgorzata Ćwiklińska-Jurkowska, Collegium Medium Uniwersytetu Mikołaja Kopernika

Agregacje oparte na losowych podzbiorach tego samego zbioru uczącego stosowane są najczęściej do niestabilnych drzew klasyfikacyjnych lub sieci neuronowych. Interesująca jest trafność fuzji metodą agregacji bootstrapowych (bagging) lub deterministycznym wzmacnianiem (boosting) dla innych klasyfikatorów bazowych oraz czynniki na nią wpływające.



Projekt jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Od klasyfikatorów, zarówno pojedynczych jak i łączonych, oczekuje się, aby oszacowania błędów generalizacji miały, a ponadto, aby błędy były stabilne. Ogólne tendencje bootstrapowych błędów 0.632 dla fuzji bagging i boosting oraz ich stabilności dla wzrastających wielkości zbiorów uczących skonfrontowano z tymi charakterystykami dla klasyfikatorów bazowych. Oprócz drzew klasyfikacyjnych wykorzystano takie bazowe funkcje dyskryminacyjne jak metody 1 i k najbliższych sąsiadów, regularyzowaną dyskryminację liniową, estymację gęstości metodą jądrową z różnymi parametrami regularyzacyjnymi oraz SVM (maszyną wektorów nośnych) z różnymi funkcjami jądrowymi. Zbadano korelacje redukcji błędów i stabilności z wielkością zbioru dla fuzji bagging i boosting tych niestandardowych dla takiego łączenia klasyfikatorów bazowych, na podstawie kilku zbiorów medycznych o różnym charakterze.

4.3 Prawie-okresowość i fizyka quasikryształów

Włodzimierz Domański, Wojskowa Akademia Techniczna

W fizyce ciała stałego aż do momentu odkrycia quasikryształów najważniejsze było pojęcie okresowości. Ciała stałe dzielone na kryształy czyli struktury periodycznie uporządkowane i te nieuporządkowane czyli amorficzne jak na przykład szkło. Struktura kryształu ma w sobie symetrię okresowego powtarzanie się w przestrzeni przy czym niemożliwa jest aby siatka krystaliczna dopuściła pięciokrotną symetrię rotacyjną. Dan Shechtman badając widmo dyfrakcyjne pewnych stopów metalicznych odkrył w 1982 roku, że jest ono zbudowane na icosahedralnej symetrii co przeczyło dotychczasowej wiedzy na temat kryształów. Mimo oporów środowiska naukowego w tym takich autorytetów jak Linus Pauling i problemów z opublikowaniem wyników swoich prac, doprowadził do uznania, że odkryta zostały nowe struktury, które nazwano quasikryształami. Odkrycie quasikryształów czyli ciał stałych wykazujących doskonałe uporządkowanie dalekiego zasięgu ale bez trójwymiarowej periodyczności translacyjnej spowodowało konieczność wprowadzenia nowej definicji kryształów i zwróciło uwagę na rolę prawie-okresowości.

W mojej prezentacji przedstawione zostaną fizyczne własności quasi-kryształów a w szczególności ich własności sprężyste. Omówione zostaną związki konstytutywne dla quasikryształów gdzie obok fononów uwzględnia się również związki dla mezonów. Zaprezentowane także będą próby matematycznego opisu quasikryształów.

4.4 O stabilizacji wielkości populacji metodą ALC

Ewa Girejko, Politechnika Białostocka

Analiza problemu stabilizacji populacji biologicznej opisaną przez dynamikę nieliniowych układów jest jednym z podstawowych pytań dotyczącym kilku dyscyplin, w tym ekologii i biologii. Jedną z ważnych kwestii jest sposób na zmniejszenie fluktuacji (zakresu wahań) w wielkości populacji. Naszym pomysłem jest zastosowanie adaptacyjnego sterowania, adaptive limiter control-ALC, które jest nową metodą kontrolowania oscylacji populacji. Rozważamy następujący model opisujący dynamikę jednej populacji w dwóch środowiskach, opisaną równaniami:

$$\begin{aligned} a_{t+1} &= f_1(a_t, b_t) = (1 - \alpha)f(a_t) + \alpha f(b_t) \\ b_{t+1} &= f_2(a_t, b_t) = \alpha f(a_t) + (1 - \alpha)f(b_t), \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie a_t, b_t są wielkościami populacji w czasie t w środowiskach A, B , $\alpha \in [0, 1]$ i f jest funkcją jednej zmiennej spełniającą pewne zadane warunki. Dla modelu danego przez układ (1) wprowadzamy metodę ALC do pierwszego równania i poszukujemy obszaru zachowującego rozmiar populacji ze środowiska A .

Współautorzy: Daniel Franco, Dorota Mozyrska

4.5 Metody stopnia topologicznego w poszukiwaniu rozwiązań okresowych

Jacek Gulgowski, Uniwersytet Gdański

Rozważmy zagadnienie okresowe dla zwyczajnego równania różniczkowego drugiego rzędu

$$\begin{cases} x''(t) + f(t, x(t), x'(t)) = 0 & t \in (0, 1) \\ x(0) = x(1) \\ x'(0) = x'(1) \end{cases}$$

dla odpowiednich funkcji $f : [0, 1] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, lub jego nieco ogólniejszą formę z rzeczywistym parametrem λ :

$$\begin{cases} x''(t) + f(\lambda, t, x(t), x'(t)) = 0 & t \in (0, 1) \\ x(0) = x(1) \\ x'(0) = x'(1) \end{cases}$$



Projekt jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

gdzie $f : \mathbf{R} \times [0, 1] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Rozpatrywać możemy tu zarówno rozwiązania klasyczne (przy założeniu, że f jest ciągła) lub też słabe (przy założeniu, że f spełnia odpowiednie warunki Caratheodory'ego).

Omówimy pewne znane z literatury pomysły na wykorzystanie teorii stopnia topologicznego do pokazania istnienia rozwiązań wymienionych zagadnień – oczywiście przy odpowiednich założeniach na funkcję f . Podane zostaną wyniki uzyskane w oparciu o ograniczenia *a priori* na zbiór rozwiązań jak również o globalne twierdzenia bifurkacyjne (typu Rabinowitza).

4.6 Metoda Rothe dla układów hiperbolicznych w postaci kanonicznej Schaudera

Danuta Jaruszewska–Walczak, Uniwersytet Gdański

Rozważamy układy hiperboliczne w postaci kanonicznej Schaudera

$$\sum_{j=1}^m A_{ij} \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{l=1}^n a_{il} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) = f_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Metoda Rothe polega na dyskretyzacji problemu różniczkowego względem zmiennej czasowej t . Badamy stabilność i zbieżność tej metody. Stosujemy metodę Rothe również do pewnej klasy silnie sprzężonych układów nieliniowych, które można sprowadzić do postaci kanonicznej Schaudera za pomocą linearyzacji.

Współautor: Henryk Leszczyński

4.7 Różne typy entropii i ich zastosowania do analizy danych kardiologicznych

Agnieszka Kaczkowska, Politechnika Gdańska

Pojęcie entropii jako miary złożoności układu ma różnorodne zastosowania np. w ekonomii czy medycynie. Istnieje wiele różnych rodzajów tego parametru, wybieranych w zależności od tego, jakimi danymi dysponujemy i co dokładnie chcemy zmierzyć. W badaniu danych kardiologicznych, tj. dla ciągów odstępów rytmu serca, rozpowszechnione są metody: Approximate Entropy (ApEn), Sample Entropy (SampEn) oraz Permutation Entropy (PermEn). W niniejszej prezentacji zostaną one dokładniej omówione. Ich

działanie zostanie zaprezentowane na przykładzie danych pochodzących z testu pochyleniowego, przeprowadzonego na 100 osobowej grupie pacjentów cierpiących na zespół wazowagalny, ze zróżnicowanymi wzorcami oddechu. Okazuje się, że miary oparte na entropii pozwalają nam przewidzieć wynik testu pochyleniowego (z poziomem istotności $p < 0,05$) już na jego początku, jednak są one niewrażliwe na sposób oddychania.

4.8 Prawieokresowość w modelach typu *integrate-and-fire*

Piotr Kasprzak, UAM w Poznaniu

Jednym z zastosowań układów *integrate-and-fire* jest modelowanie dynamiki aktywności komórek nerwowych. W tych zazwyczaj jednowymiarowych modelach, dynamika opisywana przez równanie różniczkowe zostaje zaburzona tak zwanym „resetowaniem” do wartości spoczynkowej. We wspomnianym na wstępie modelu, resetowanie związane jest ze zjawiskiem generowania potencjału czynnościowego przez neuron, w ogólności natomiast odpowiada sytuacji, gdy układ oscylujący ma praktycznie natychmiastowy czas „relaksacji”. Mimo, iż modele takie są mniej realistyczne (niż na przykład model neuronu Hodgkina–Huxley’a), to dzięki swej prostocie są one powszechnie rozważane. Celem wykładu będzie omówienie ogólnych własności układów typu *integrate-and-fire*, dotyczących w szczególności tak zwanego firing map, to jest odwzorowania stowarzyszonego z wyjściowym układem, którego analiza jest źródłem wielu jakościowych informacji o rozważanym zjawisku. Zainteresowani będziemy głównie sytuacją, gdy funkcja wymuszająca jest okresowa lub prawie okresowa.

4.9 Problemy matematyczne w nowym modelu szybkich fal wapniowych

Bogdan Kaźmierczak, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Przedmiotem referatu są problemy istnienia rozwiązań w nowym modelu szybkich fal wapniowych w długich komórkach biologicznych. Fale takie generowane są napływem wapnia przez mechanicznie stymulowane kanały membranowe. Okazuje się, że niektóre aproksymacje modelu, uzyskane np. przez przejście z promieniem przekroju komórki do zera, czy też dla nieskończenie krótkiego czasu relaksacji sieci aktynowo-miozynowej, prowadzą do problemów źle postawionych. Powstaje zatem pytanie, czy problemy początkowo-brzegowe dla układu wyjściowego są dobrze postawione. W referacie rozważymy zatem

zagadnienie istnienia rozwiązań dla oryginalnego układu równań modelujących szybkie fale wapniowe.

Współautorzy: Zbigniew Peradzyński, Dominika Nowicka

4.10 Dynamika ewolucyjna procesów asymilacyjnych z uwzględnieniem względnego niedostatku

Grzegorz Kosiorowski, Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Jeśli gracze nie są w stanie z góry przewidzieć swojej końcowej wypłaty, gdyż zależy ona od działań wielu pozostałych członków populacji, statyczne modele teorii gier mogą okazać się nierealistyczne. W takiej sytuacji można rozważać grę ewolucyjną opartą na tzw. dynamice replikacyjnej, czyli założeniu, że każdy z graczy obserwuje strategie i wypłaty losowej próbki pozostałych, a następnie dostosowuje się do tych obserwacji, korygując swoją strategię. Proces ten opisywany jest za pomocą równania różniczkowego, które generuje układ dynamiczny. Stabilne punkty stałe tego układu reprezentują kandydatury na równowagi Nasha danej gry.

Narzędzie dynamiki replikacyjnej wykorzystamy do zbadania pewnego modelu asymilacji migrantów, opartego nie tylko na wzroście dochodów spowodowanych asymilacją oraz koniecznym do asymilacji wysiłku ale też na tzw. względnym niedostatku, czyli odczuciu dyskomfortu wywołanego przez porównanie dochodów z osobami bogatszymi. Dla pewnych parametrów, model powoduje pojawienie się wielu równowag Nasha, wyjaśniając zarówno różnorodność zachowań asymilacyjnych różnych grup migrantów jak i uzgadnianie opinii wewnątrz mniejszych grup. Podejście dynamiczne umożliwia także dostrzeżenie nowych możliwości w zakresie zachęcania migrantów do asymilacji.

Referat opiera się na pracy: „Relative deprivation and the evolutionary dynamics of assimilation” (O.Stark, G. Kosiorowski, 2015) złożonej do publikacji w Journal of Economic Dynamics and Control.

4.11 Zastosowanie modelu błędzenia losowego cząsteczki do modelowania procesów subdyfuzji–reakcji

Tadeusz Kosztołowicz, Uniwersytet Jana Kochanowskiego w Kielcach

Subdyfuzja, podobnie jak dyfuzja normalna, jest procesem spontanicznego rozprzestrzeniania się cząsteczek spowodowanego ruchami Browna. W porównaniu z dyfuzją normalną subdyfuzja jest procesem bardzo ‘powolnym’, procesy te mają jakościowo różne



Projekt jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

charakterystyki. Subdyfuzja może występować w ośrodkach takich jak żele czy ośrodki porowate, w których ruch cząsteczek jest zancząco utrudniony. Przyjmujemy, że w przypadku subdyfuzji średni czas oczekiwania cząsteczki na przeskoc jest nieskończony, podczas gdy dla dyfuzji normalnej przyjmuje on skończoną wartość. Najczęściej procesy dyfuzji normalnej i anomalnej (w tym subdyfuzji) są charakteryzowane relacją $\langle (\Delta x)^2 \rangle \sim t^\alpha$, gdzie $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ jest średnim kwadratem przemieszczenia cząsteczki po czasie t , α jest parametrem (wykładnikiem) subdyfuzji. Dla $\alpha = 1$ otrzymujemy relację charakteryzującą dyfuzję normalną.

Zaprezentowana zostanie nowa metoda wyprowadzenia różnego typu równań subdyfuzji–reakcji w układzie jednowymiarowym w oparciu o model błędzenia losowego cząsteczki w układzie dyskretnym, w którym czas n oraz zmienna przestrzenna m przyjmują wartości całkowite. Model błędzenia losowego cząsteczki opisany jest wówczas równaniami różnicowymi postaci

$$P_{n+1}(m; m_0) = \sum_{m'} p_{m,m'} P_n(m'; m_0) ,$$

gdzie $P_n(m; m_0)$ jest prawdopodobieństwem znalezienia cząsteczki w punkcie m po czasie n , m_0 jest położeniem początkowym cząsteczki, $p_{m,m'}$ jest prawdopodobieństwem przeskoku cząsteczki z położenia m' do położenia m . Po rozwiązaniu równań różnicowych metodą funkcji generującej następuje przejście od zmiennych ciągłych do zmiennych dyskretnych, wynikiem czego otrzymana zostanie gęstość prawdopodobieństwa (funkcja Greena) $P(x, t; x_0)$. Przejście od dyskretnego do ciągłego czasu następuje z wykorzystaniem gęstości prawdopodobieństwa czasu oczekiwania na przeskoc cząsteczki $\omega_R(t)$, w której w szczególny sposób uwzględnione jest prawdopodobieństwo R zajścia reakcji w czasie oczekiwania cząsteczki na przeskoc; prawdopodobieństwo R zależy od współczynników charakteryzujących reakcję. Reakcja interpretowana jest tutaj w sposób ogólny, może nią być np. ‘typowa’ reakcja chemiczna lub zabijanie bakterii na skutek działania antybiotyku. Prezentowana metoda pozwala także – obok wyznaczenia funkcji Greena – na wyprowadzenie różnych postaci równania subdyfuzji z reakcjami chemicznymi, w zależności od szczególnych postaci funkcji $\omega_R(t)$ [1,2]; funkcje Greena będą rozwiązaniami tych równań. Równania te są cząstkowymi równaniami różniczkowymi z pochodnymi rzędu ułamkowego względem zmiennej t . Model oparty na procesie błędzenia losowego w układzie dyskretnym ma charakter ogólny i może być zastosowany do opisu procesów subdyfuzji–reakcji w układach zawierających cienkie częściowo przepuszczalne membrany [3], co może być szczególnie przydatne w modelowaniu transportu cząsteczek w układach biologicznych. Otrzymane funkcje i równania dla układu subdyfuzyjnego mogą być także zastosowane, po dokonaniu przejścia granicznego $\alpha \rightarrow 1$, do opisu procesu dyfuzji normalnej z reakcjami.

Literatura:

1. T. Kosztołowicz, Phys. Rev. E **90**, 042151 (2014).
2. T. Kosztołowicz, K.D. Lewandowska, Phys. Rev. E **90**, 032136 (2014).
3. T. Kosztołowicz, Phys. Rev. E **91**, 022102 (2015).

4.12 Wykorzystanie teorii perkolacji w badaniach morfologii materiałów polimerowych na przykładzie polidimetakrylanów stomatologicznych

Monika Krasowska, Politechnika Śląska

Teoria perkolacji jest jednym ze znanych modeli opisujących nieuporządkowane układy oraz struktury o stochastycznej geometrii. Przykładem takiego układu może być sieć polimerowa, która powstaje w wyniku procesu polimeryzacji. Struktura materiału jest rozważana wówczas jako sieć połączonych węzłów, a parametry perkolacyjne mogą służyć do opisu jej morfologii. Analiza oparta na algorytmie Hoshena–Kopelmana pozwala na wyznaczenie takich parametrów perkolacji, jak: prawdopodobieństwo perkolacji P i ścieżka perkolacji p_c . Obliczenie tych parametrów wykonano w oparciu o strukturę sieci danego polimeru, przedstawioną na zdjęciach, wykonanych mikroskopem sił atomowych AFM lub skaningowym mikroskopem elektronowym SEM. Otrzymane wartości wymienionych parametrów posłużyć mogą do opisu wpływu budowy materiału polimerowego na jego własności. Analizy zostały przeprowadzone dla serii polidimetakrylanów i ich kompozycji mających zastosowanie w stomatologii. Stwierdzono między innymi, że prawdopodobieństwo perkolacji P zależy od budowy łańcucha monomerów. Obecność w nim sztywnych ugrupowań może powodować wzrost prawdopodobieństwa P (polimery o sztywnych łańcuchach trudniej ulegają splątaniu) natomiast obecność elastycznych łańcuchów może wpływać na spadek jego wartości. Prezentowane badania mogą w przyszłości pomóc w zaprojektowaniu materiału o pożądanych właściwościach.

Współautorzy: Izabela Barszczewska–Rybarek, Anna Strzelewicz

4.13 Modelowanie mocy i zasięgu zewnątrzkomórkowego pola elektrycznego w populacji neuronów korowych

Szymon Łęski, Instytut Biologii Doświadczalnej im. M. Nenckiego PAN

Zewnątrzkomórkowe rejestracje potencjału elektrycznego w tkance są jedną z powszechnych technik badania układu nerwowego na poziomie populacji, jednak interpretacja takich sygnałów narażona jest na trudności. Aby lepiej zrozumieć związek pomiędzy aktywnością



Projekt jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

neuronów a obserwowanym w doświadczeniach polem elektrycznym można wykorzystać modele obliczeniowe, w których każdy neuron reprezentowany jest przez zastępczy obwód elektryczny.

W referacie przedstawię wyniki modelowania zewnątrzkomórkowego pola elektrycznego wytwarzanego przez populację neuronów korowych o realistycznych morfologiach. Skupię się na zjawisku różnego zaniku przestrzennego sygnału w zależności od jego częstości oraz od stopnia korelacji aktywności komórek. Pokażę, że korelacje wejść synaptycznych do populacji komórek piramidalnych powodują relatywny wzrost mocy sygnału w niskich częstościach oraz że sygnał w niskich częstościach jest „bardziej lokalny” niż w wysokich. Ponadto przedstawię uproszczony model matematyczny pozwalający na podsumowanie wyniki modelowych (numerycznych).

4.14 Funkcje relatywnie mierzalne i zjawiska prawie okresowe

Jacek Leśkow, Politechnika Krakowska

W referacie przedstawione zostaną podstawowe modele losowe zjawisk okresowych i prawie okresowych. W szczególności omówione zostaną twierdzenia dotyczące metod estymacji współczynników rozwinięcia Fouriera funkcji autokowariancji. Przedstawione też zostanie wykorzystanie funkcji relatywnie mierzalnych i miar relatywnych w modelowaniu zjawisk prawie okresowych. Referat będzie ilustrowany przykładami zastosowań w biomechanice, analizie sygnałów telekomunikacyjnych i analizie sygnałów mechanicznych.

4.15 Czasooptymalne sterowanie układami niecałkowitego rzędu

Ivan Matychyn, Uniwersytet Kazimierza Wielkiego w Bydgoszczy

Równania różniczkowe niecałkowitego rzędu są często wykorzystane jako modele procesów wykazujących takie właściwości jak pamięć długotrwała i samopodobieństwo. Równania te pojawiają się w sposób naturalny w wielu dziedzinach, takich jak reologia, sejsmologia, biofizyka, modeli neuronów (komórek nerwowych), zjawiska przepływu krwi, aerodynamika, przepływ cieczy w ośrodku porowatym, lepkość, obwody elektryczne, dynamika populacyjna, teoria sterowania, aproksymacja danych pomiarowych itp.

Praca prezentuje wybrane wyniki dotyczące układów liniowych równań różniczkowych niecałkowitego rzędu i ich zastosowanie do problemu sterowania czasooptymalnego takimi

układami. Kluczową rolę w teorii równań różniczkowych niecałkowitego rzędu odgrywają funkcje Mittag-Lefflera, przy czym rozwiązania liniowych układów ułamkowego rzędu wyrażają się w sposób jawny przez analogi macierzowe tych funkcji. W pracy przedstawiono algorytmy numeryczne do obliczenia funkcji macierzowych Mittag-Lefflera.

Za pomocą techniki funkcji podpierających zbiorów osiągalności znaleziono warunki dostateczne optymalności sterowania układami liniowymi o dynamice ułamkowej. Warunki te stanowią pewny analog do zasady maksimum Pontriagina. Wyniki teoretyczne zostały wykorzystane w przykładzie ilustracyjnym.

4.16 Obliczanie Synergii

Tomasz P. Michalak, Uniwersytet Warszawski & University of Oxford

Fenomen synergii występuje w wielu różnych sytuacjach, od świata naturalnego, poprzez fizykę, chemię, do relacji międzyludzkich w organizacjach. Dotyczy poziomu mikro jak i makro, świata organicznego i nieorganicznego. Synergia odgrywa także ważną rolę w informatyce, a w dziedzinie sztucznej inteligencji, w tym systemach wieloagentowych, w szczególności.

W literaturze zaproponowano kilka różnych miar synergii pomiędzy grupą elementów – każda z tych miar rozpatruje zagadnienie synergii z nieco innej perspektywy i stosując nieco inną interpretację fenomenu synergii. W niniejszym wystąpieniu omówimy i porównamy istniejące ogólne, kombinatoryczne miary synergii (tj. dla zbiorów trzy lub więcej-elementowych). Szczególną uwagę poświęcimy kwestiom obliczeniowym dotyczącym różnych miar synergii. Korzystając z szerokiego dorobku na temat obliczeniowych aspektów kooperacyjnej teorii gier, pokażemy, że pomimo złożonej formy kombinatorycznej, synergii można obliczać w czasie wielomianowym.

4.17 Matematyczne modelowanie silników jonowych stosowanych w technice kosmicznej

Zbigniew Peradzyński, Wojskowa Akademia Techniczna & Instytut Fizyki Plazmy i Laserowej Mikrosyntezy

Wprawdzie prace zaczęły się wcześniej, jednakże silniki jonowe pojawiły się jako silniki korekcyjne na wyposażeniu satelitów w latach siedemdziesiątych. W ostatnim dziesięcioleciu zaczęły robić karierę również jako silniki 'marszowe' pojazdów kosmicznych (np.



Projekt jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

misja księżycowa SMART 1). Zwykle zaczynają prace po uprzednim wyniesieniu pojazdu na orbitę okołozemską. W porównaniu do silników chemicznych charakteryzują się dużo większą sprawnością. Energię czerpią zwykle z baterii chemicznych bądź też z reakcji jądrowych. Jest kilka typów silników jonowych.

W tym wykładzie zajmiemy się matematycznym opisem silnika wykorzystującego efekt Halla. W silnikach tych plazma porusza się w skrzyżowanych polach magnetycznym i elektrycznym, co powoduje znaczne obniżenie ruchliwości elektronów i wzrost pola elektrycznego, dzięki czemu jony odpowiedzialne za siłę odrzutu mogą być przyspieszane do dużych prędkości. Pomimo prawie 40 lat ich kariery ciągle brak jest satysfakcjonującego i w pełni adekwatnego opisu matematycznego, co bardzo utrudnia optymalizację takich urządzeń. W szczególności przy zastosowaniu wyższych napięć (powyżej 500V) wbrew oczekiwaniom, obserwuje się wystąpienie silnych niestabilności oraz istotne obniżenie sprawności. Stosowanie opisu kinetycznego - najbardziej adekwatnego - jest w praktyce niemożliwe ze względu na olbrzymią różnicę mas elektronu i jonu (10^5 razy). Najczęściej używanym i stosunkowo prostym opisem jest opis trój-płynowy (lub k-płynowy), który rozwinęliśmy w ramach współpracy z francuskim przemysłem kosmicznym w latach 90-tych. Przepływ plazmy modelowany jest trzema układami sprzężonych równań typu hydrodynamicznego. Jednakże występują tu poważne trudności związane z faktem, że założenia opisu płynowego nie są do końca spełnione. Średnia droga swobodna na zderzenia jon-jon jest dużo dłuższa aniżeli rozmiary urządzenia. W przypadku elektronów, średnia droga swobodna w kierunkach prostopadłych do pola magnetycznego pomiędzy zderzeniami jest dostatecznie krótka, aby opis płynowy w tych kierunkach był uzasadniony. Inny problem to występowanie turbulencji plazmowej i związane z tym anomalne przewodnictwo elektronowe. Wykład poświęcony będzie wyprowadzeniu oraz matematycznej analizie układu równań opisującego dynamikę plazmy w silniku typu Halla. Omówimy również porównania pomiędzy wynikami teoretycznych przewidywań oraz wynikami pomiarów eksperymentalnych.

4.18 Opis i analiza transportu masy par i gazów przez membrany magnetyczne

Anna Strzelewicz, Politechnika Śląska w Gliwicach

Sprawą o zasadniczym znaczeniu w badaniach transportu masy przez membrany jest umiejętność „postawienia” odpowiedniego zagadnienia. Chodzi głównie o wybór stosowanego równania transportu oraz warunków: początkowych i brzegowych, tak, aby uzyskane

rozwiązanie spełniało oczekiwania zarówno doświadczalne jak i matematyczne.

Z matematycznego punktu widzenia chodzi najczęściej o rozwiązanie tzw. problemu „dobrze postawionego” tj. takiego, dla którego rozwiązanie istnieje, jest jedyne i zależy w sposób ciągły od warunków. Z „fizycznego” punktu widzenia chodzi najczęściej o formę analityczną rozwiązania, która umożliwia wyznaczenie stałych opisujących dany proces np. współczynnika dyfuzji.

Do rozdzielania par i gazów stosuje się membrany o różnej strukturze, co wpływa na mechanizm rozdziału danej mieszaniny. Jeżeli gazy i ich mieszaniny zachowują się "idealnie" to wyznaczenie odpowiednich współczynników transportu nie nastręcza żadnych kłopotów. W najprostszym przypadku, gdy na układ nie wpływają żadne siły zewnętrzne, a transport masy jest dyfuzyjny, do opisu matematycznego wykorzystuje się równanie Ficka. W przypadku gdy na układ działa pole magnetyczne, równanie transportu musi zostać uzupełnione o dodatkowy człon uwzględniający siły działające na układ. Ponadto jeżeli w opisie chce się uwzględnić własności strukturalne i morfologiczne membrany, to dla membran o strukturze fraktalnej przydatne okazują się równania różniczkowe cząstkowe z pochodnymi ułamkowymi.

Praca ta stanowi część badań mających na celu zaprojektowanie modyfikowanych membran polimerowych o określonej odporności termicznej, chemicznej oraz mechanicznej, stosowanych w procesach rozdziału mieszanin gazowych i ciekłych.

Współautorzy: Monika Krasowska, Gabriela Dudek

4.19 Wielowartościowe całki i inkluzje stochastyczne w modelu finansowym

Joachim Syga, Uniwersytet Zielonogórski

W referacie przedstawione zostaną stochastyczne wielowartościowe opisy pewnego modelu finansowego. Podane zostaną twierdzenia: istnienia rozwiązań oraz domkniętości zbioru rozwiązań dla przedstawionych postaci opisu tego modelu.

Literatura

- [1] K.K. AASE, P. GUTTRUP, Estimation in models for security prices, *Scand. Actuarial J.*, 3/4:211-225, 1987.
- [2] MOTYL J., SYGA J., *Selection property of Stratonovich set-valued integral*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems 17 3(2010), 431-443.



Projekt jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

- [3] SYGA J., *Application of semimartingale measure in the investigation of stochastic inclusion*, Dynamic Systems and Applications, 2012, 21 (2012) 393-406.
- [4] SYGA J., *Semimartingale measure in the investigation of Stratonovich-type stochastic integrals and inclusions*, Disc. Math. Probab. Stat. 2015, przyjęty do druku.

4.20 Niestandardowa analiza numeryczna modelu drapieżnik-ofiara opisanego układem równań różniczkowych niecałkowitego rzędu

Anna Szafrńska, Politechnika Gdańska

Prezentowana jest niestandardowa metoda różnic skończonych typu Mickensa, która zachowuje dynamiczne własności rozwiązania zagadnienia różniczkowego. Metoda jest wykorzystana do numerycznej aproksymacji równania różniczkowego niecałkowitego rzędu. Wykazana jest własność dodatniości skonstruowanego schematu różnicowego, która jest istotna w modelowaniu między innymi zagadnień biologicznych czy fizycznych. Dla przykładu analizowany jest model drapieżnik–ofiara opisany układem równań różniczkowych niecałkowitego rzędu.

Współautor: Jacky Cresson

4.21 Uogólnione rozwiązania zdegenerowanych nierówności parabolicznych

Krzysztof A. Topolski, Uniwersytet Gdański

Rozważamy uogólnione nierówności różniczkowe i problemy porównawcze dla zdegenerowanych równań parabolicznych z nieliniowymi funkcjami porównawczymi. Jak wiadomo znajdują one liczne zastosowania w zagadnieniach różniczkowych. Służą m.in. do szacowania rozwiązań (aprioryczne oszacowania), do szacowania dziedziny rozwiązań, badania jednoznaczności rozwiązań oraz szacowania błędu dla rozwiązań przybliżonych. Funkcje górne i dolne są podstawą wielu twierdzeń o istnieniu rozwiązań. Jako rozwiązania nierówności dopuszczamy funkcje nieciągłe (absolutnie ciągłe z dołu i absolutnie ciągłe z góry względem czasu). Rozważamy również nieciągłe funkcje porównawcze.



Projekt jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4.22 Zastosowanie stochastycznych równań różniczkowych w modelowaniu transportu cząstek galaktycznego promieniowania kosmicznego w heliosferze

Anna Wawrzynczak, Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

Przedstawiony zostanie stochastyczny model transportu cząstek galaktycznego promieniowania kosmicznego w heliosferze w oparciu o rozwiązanie numeryczne równania transportu Parkera. Z matematycznego punktu widzenia równanie transportu Parkera jest 4-wymiarowym (3 zmienne przestrzenne i E energia cząstek) niestacjonarnym równaniem różniczkowym cząstkowym II rzędu typu parabolicznego.

Zaprezentowana zostanie metoda rozwiązania numerycznego w/w równania w oparciu o rozwiązanie równoważnego układu równań różniczkowych stochastycznych w sferycznym układzie heliocentrycznym. Podejście to oparte jest na założeniu, że każdy proces losowy jest niezależny od innych procesów, a cząstka porusza się w sposób losowy, który może być opisany, jako ruch Browna. W związku z tym ruch pojedynczej cząstki może być matematycznie opisany, jako stochastyczny proces Markowa, a cały rozpatrywany układ ewoluuje w sposób probabilistyczny, w którym zmiennymi losowymi będą położenie cząstki i jej energia w danej chwili. W efekcie trajektorię cząstki można opisać za pomocą układu stochastycznych równań różniczkowych zwyczajnych, sprowadzając problem rozwiązania wielowymiarowego równania transportu do rozwiązania układu równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego zawierających czynnik losowy.

W oparciu o zaprezentowaną metodę przedstawiony zostanie model efektu Forbusha intensywności galaktycznego promieniowania kosmicznego. Wyniki modelowania porównane zostaną z danymi eksperymentalnymi.

4.23 Wyznaczanie propagacji promieniowania rentgenowskiego dla układów optycznych składających się z wielu soczewek przy pomocy metody różnic skończonych

Paweł Wojda, Politechnika Gdańska

Badanie dotyczy propagacji promieniowania rentgenowskiego przez układy optyczne składające się z wielu soczewek refrakcyjnych oraz skupiania promieniowania rentgenowskiego. Rozprzestrzenienie fal rentgenowskich w tego typu sytuacjach może być opisane przy pomocy niejednorodnego równania parabolicznego, w którym niejednorodność oraz

współczynniki są zespolone. W celu wyznaczenia propagacji promieniowania rentgenowskiego dla tego równania wykorzystana jest metoda różnic skończonych. Błąd symulacji jest oszacowany matematycznie i zbadany. Okazuje się, że bardzo szczegółowa siatka węzłów jest konieczna do rzetelnego i dokładnego wyznaczenia propagacji fal rentgenowskich dla układów optycznych składających się z wielu soczewek. Jest to spowodowane tym, że kiedy fale propagują przez układ wielu soczewek, pole elektryczne staje się szybko oscylującą funkcją współrzędnych prostopadłych do osi optycznej i bardzo szczegółowa siatka węzłów jest niezbędna do dyskretyzacji takiego pola falowego.

Aby uniknąć takiej sytuacji, przedstawiamy równanie dla funkcji fazy zespolonej zamiast równania dla pola elektrycznego. Równanie dla funkcji fazy zespolonej jest równaniem nieliniowym. W badaniu zaprezentowano, że równanie dla funkcji fazy zespolonej pozwala na znaczne zredukowanie liczby węzłów, które są potrzebne do przeprowadzenia wiarygodnych i dokładnych symulacji propagacji promieniowania rentgenowskiego przez układ wielu soczewek oraz jego skupiania. Oszacowano błąd symulacji zaproponowanej metody i zaprezentowano przykłady uzyskanych wyników.

4.24 Równowagi Markowa w dynamicznych, supermodularnych gospodarkach z continuum graczy i brakiem zagregowanego ryzyka

Łukasz Woźny, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

W pracy analizujemy gry/gospodarki stochastyczne z nieskończonym horyzontem czasowym z występowaniem strategicznych komplementarności pomiędzy continuum graczy. Dowodzimy istnienia stacjonarnej równowagi Markowa przy innych założeniach niż Jovanovic, Rosenthal (1988), Bergin, Bernhardt (1992), Sleet, (2001), czy Chakrabarti (2003) używając metod konstruktywnych. Co ważne, dynamiczne prawo wielkich liczb dla continuum zmiennych losowych, które udowadniany w pracy, aby analizować dynamikę zagregowanej zmiennej stanu implikuje występowanie braku zagregowanego ryzyka. Ponadto, dowodzimy wyników z zakresu statyki komparatywnej dla uporządkowanych perturbacji naszej gry/gospodarki. Wreszcie dyskutujemy podobieństwa i różnice w stosunku do gier z tzw. "nieświadomymi równowagami" Adlakha, Johari (2010) czy Weintraub, Benkard, VanRoy (2008).

Współautorzy: Łukasz Balbus, Paweł Dziewulski, Kevin Reffett

4.25 Badanie stabilności i stabilizacja liniowych układów różnicowych niecałkowitego rzędu z wykorzystaniem $\mathcal{Z}$ -transformaty

Małgorzata Wyrwas, Politechnika Białostocka

Omówione zostaną warunki stabilności liniowych układów różnicowych niecałkowitego rzędu. Jednym z efektywnych narzędzi umożliwiających badanie stabilności dyskretnych układów liniowych jest $\mathcal{Z}$ -transformata, która zostanie wykorzystana do pokazania warunków stabilności asymptotycznej rozważanych układów. Bazując na otrzymanych wynikach zbadany zostanie problem stabilizacji różnicowych układów sterowania niecałkowitego rzędu.

Współautor: Dorota Mozyrska

Indeks nazwisk

- Balbus Łukasz, [14](#)
Bartłomiejczyk Agnieszka, [1](#)
Bartłomiejczyk Piotr, [2](#)
Bartoszek Krzysztof, [10](#)
Bodnar Marek, [3](#)
Bugajewski Dariusz, [3](#)

Ćwiklińska-Jurkowska Małgorzata, [14](#)

Domański Włodzimierz, [15](#)

Gil-Świdorska Agnieszka, [5](#)
Girejko Ewa, [16](#)
Goławska Urszula, [1](#)
Graff Grzegorz, [1](#)
Gulgowski Jacek, [16](#)

Jaruszevska-Walczak Danuta, [17](#)

Kaźmierczak Bogdan, [18](#)
Kałamajska Agnieszka, [6](#)
Kaczkowska Agnieszka, [17](#)
Kasprzak Piotr, [18](#)
Kosiorowski Grzegorz, [19](#)
Kosztolowicz Tadeusz, [19](#)
Krasowska Monika, [21](#)

Leśkow Jacek, [22](#)
Łęski Szymon, [21](#)

Maćkowiak Piotr, [6](#)
Matychyn Ivan, [22](#)
Michalak Tomasz P., [23](#)
Mozyrska Dorota, [7](#)

Peradzyński Zbigniew, [23](#)
Pilarczyk Paweł, [11](#)

Signerska-Rynkowska Justyna, [8](#)
Strzelecki Paweł, [1](#)
Strzelewicz Anna, [24](#)
Styborski Marcin, [1](#)
Syga Joachim, [25](#)
Szafrńska Anna, [26](#)

Topolski Krzysztof A., [26](#)
Touboul Jonathan, [13](#)

Wawrzynczak Anna, [27](#)
Wiszniewska-Matyszek Agnieszka, [9](#)
Wojda Paweł, [27](#)
Woźny Łukasz, [28](#)
Wyrwas Małgorzata, [29](#)